Testo con soluzione
I prova in itinere di Fondamenti di Automatica - 18/11/2004
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)\big(sen(x_1(t)) + 2\big) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t)x_2(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{1}$$

dove α è un parametro reale.

1.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema è lineare o non lineare, statico o dinamico, tempo variante o tempo invariante, strettamente proprio o proprio.

Sistema non lineare (nella prima equazione di stato compare un termine non lineare in x_1), dinamico (l'uscita $y(t)$ non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso u allo stesso istante t), strettamente proprio (l'ingresso u non compare nella trasformazione di uscita).

1.2 Determinare l'unico movimento di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = 1, \forall t$ (calcolare sia lo stato $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ che l'uscita $\bar{y}$ di equilibrio).

Ponendo a zero le derivate $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ con $u(t) = 1, \forall t$ si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1\big(sen(\bar{x}_1) + 2\big) = 0 \\ \alpha\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava lo stato di equilibrio

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases}$$

1.3 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto precedente, e valutarne le proprietà di stabilità al variare di α.

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1(t) &= -2\Delta x_1(t) \\ \Delta\dot{x}_2(t) &= \alpha\Delta x_1(t) - \Delta x_2(t) + \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_1(t) \end{aligned}$$

La matrice dinamica A del sistema linearizzato è:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

Essa ha autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -1$. Dal criterio degli autovalori segue che: il sistema linearizzato è asintoticamente stabile per ogni valore di α.

1.4 Dire, motivando la risposta, per quali valori di α l'analisi di stabilità per il sistema linearizzato svolta al punto precedente consente di trarre conclusioni circa la stabilità del movimento di equilibrio.

È possibile trarre conclusioni sulle proprietà di stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare per ogni valore di α. In particolare, il movimento di equilibrio è asintoticamente stabile per ogni valore di α.

1.5 Determinare l'espressione analitica dei movimenti dello stato e dell'uscita del sistema descritto dalle equazioni (1) quando l'ingresso applicato è $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

Si è visto al punto 2 che $\bar{x}_1 = 0$ rende identicamente nulla la derivata di x_1. Dato che la derivata di x_1 non dipende nè da x_2 nè da u, e $x_1(0) = 0$, si ha che

$$x_1(t) = 0,\ t \geq 0.$$

Da cui

$$y(t) = 0,\ t \geq 0.$$

Sostituendo l'espressione di $x_1(t)$ nella seconda equazione di stato si ottiene

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

La soluzione di questa equazione differenziale lineare quando $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$, e $x_2(0) = 1$ è:

$$x_2(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{2\tau} d\tau = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t},\ t \geq 0$$

2. Si consideri il sistema lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

2.1 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y.

Riscrivendo le equazioni di stato nel dominio delle trasformate con condizione iniziale nulla si ottiene

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s+1} U(s) \\ X_2(s) &= \frac{9}{s+1} U(s) \end{aligned}$$

Dato che

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{10}{s+1} U(s)$$

si ha

$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

2.2 Determinare la trasformata di Laplace $Y(s)$ dell'uscita forzata del sistema quando $u(t) = 2e^{-3t}$, $t \geq 0$. Calcolare $y(0)$ e $\lim_{t\to\infty} y(t)$ mediante i teoremi del valore iniziale e finale.

$$Y(s) = \frac{20}{(s+1)(s+3)}$$

Il teorema del valore iniziale è applicabile ($Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria)

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{20s}{(s+1)(s+3)} = 0.$$

Il teorema del valore finale è applicabile ($Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria con radici del denominatore a parte reale negativa)

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{20s}{(s+1)(s+3)} = 0.$$

2.3 Determinare l'espressione di $y(t)$ antitrasformando la trasformata di Laplace $Y(s)$ trovata. Verificare la correttezza dell'espressione ottenuta, confrontando valore iniziale e finale di $y(t)$ con quelli determinati al punto precedente.

Sviluppandoo in fratti semplici $Y(s)$, si ottiene

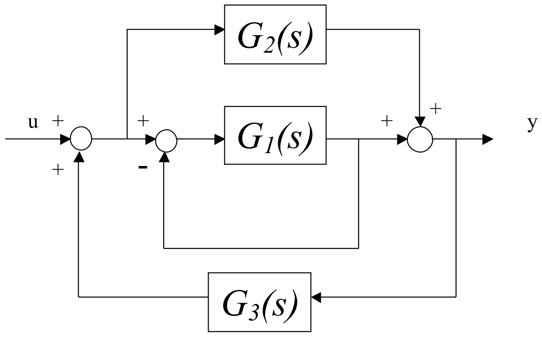
$$Y(s) = \frac{20}{(s+1)(s+3)} = \frac{10}{s+1} + \frac{-10}{s+3},$$

da cui antitrasformando i singoli addendi, per la linearità della trasformata di Laplace, si ottiene

$$y(t) = 10e^{-t} - 10e^{-3t},\ t \geq 0.$$

I valori $y(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ concordano con quelli calcolati al punto precedente.

3. Si consideri lo schema in figura, dove tutti e tre i sistemi sono del 1^o ordine e hanno funzione di trasferimento: $G_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+2}$, e $G_3(s) = \frac{4}{s+9}$.



3.1 Determinare la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y (si raccomanda di svolgere attentamente i conti).

Funzione di trasferimento del sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ retroazionato:

$$G_a(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Funzione di trasferimento di quest'ultimo sistema con il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$:

$$G_b(s) = G_a(s) + G_2(s) = \frac{2}{s+2}$$

Si noti che si è generata una parte nascosta con autovalore $\lambda = -2$.

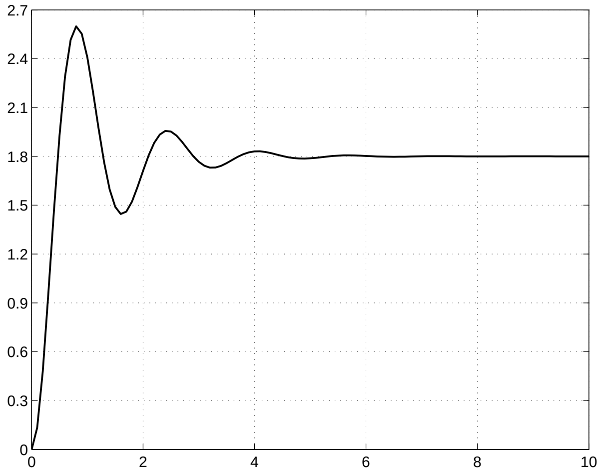
Il sistema con funzione di trasferimento $G_b(s)$ è retroazionato con il sistema con funzione di trasferimento $G_3(s)$. La funzione di trasferimento cercata è quindi:

$$H(s) = \frac{G_b(s)}{1 - G_3(s)G_b(s)} = \frac{2(s+9)}{s^2 + 11s + 10}.$$

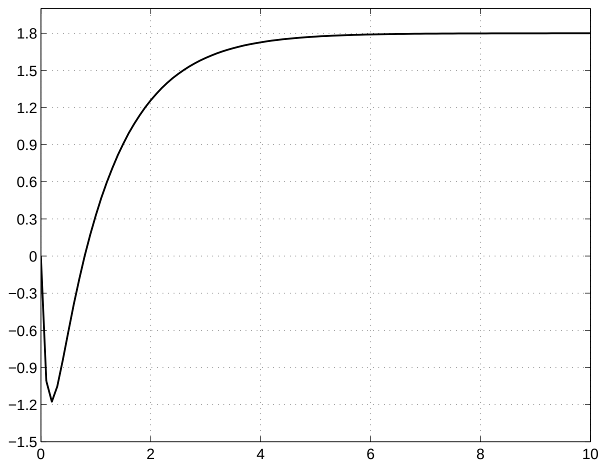
3.2 Valutare le proprietà di stabilità del sistema con ingresso u ed uscita y.

Il sistema ha ordine 3. La funzione di trasferimento trovata ha 2 poli in -1 e -10. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -10$, e l'autovalore della parte non raggiungibile e/o non osservabile generato nel parallelo tra il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ e quello con funzione di trasferimento $G_a(s)$ e cioè $\lambda_3 = -2$. Essendo tutti gli autovalori del sistema reali negativi, il sistema è asintoticamente stabile.

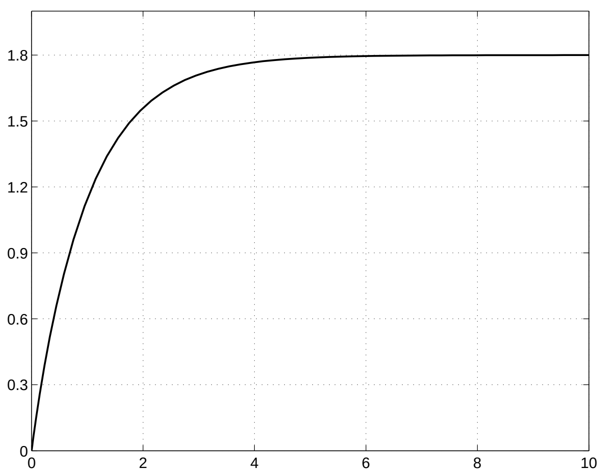
3.3 Dire, motivando la risposta, quale dei seguenti grafici rappresenta la risposta del sistema ad uno scalino unitario.



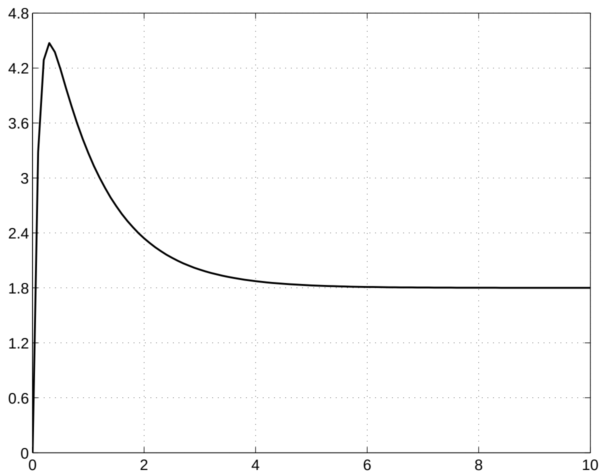
(a)



(b)



(c)



(d)

Il grafico corretto è il (c).

In tutti i grafici la risposta vale 0 all'istante iniziale e si assesta asintoticamente al valore 1.8 che è il guadagno di $H(s)$.

Escludo il grafico (a) perchè $H(s)$ non ha poli complessi coniugati, il grafico (b) perchè il sistema è a fase minima, il grafico (d) perchè lo zero in -9 ha costante di tempo $T = 1/9$ mentre i poli hanno costanti di tempo $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 1/10$ e quindi $\tau_2 < T < \tau_1$.

4. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Con riferimento all'esercitazione sperimentale svolta in laboratorio, descrivere brevemente l'impianto analizzato spiegando per quale motivo il modello utilizzato per descriverlo è dinamico.

Si veda il materiale relativo all'esercitazione di laboratorio.

b) Dire quale è il valore di D dopo l'esecuzione delle seguenti istruzioni Matlab:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6];
>> B=[0 1];
>> C=B*A;
>> D=C(1,2);
```

$$C = [4\ 5\ 6]$$

$$D = 5$$

5. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) se la funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo invariante ha un polo pari a 2, allora si può concludere che il sistema è instabile.

Vero. I poli sono anche autovalori. Quindi il sistema ha un autovalore a parte reale > 0 e per il criterio degli autovalori è instabile.

b) un sistema lineare asintoticamente stabile può avere due stati di equilibrio associati allo stesso ingresso costante.

Falso. L'equazione per determinare gli stati di equlibrio associati ad un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$, è:

$$A\bar{x} + b\bar{u} = 0$$

Se il sistema è asintoticamente stabile A è invertibile e la soluzione dell'equazione è unica e pari a

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}.$$

c) il movimento dell'uscita di un sistema lineare asintoticamente stabile tende a zero qualunque sia l'ingresso applicato.

Falsa. E' il movimento libero a tendere a zero qualunque sia la condizione iniziale.