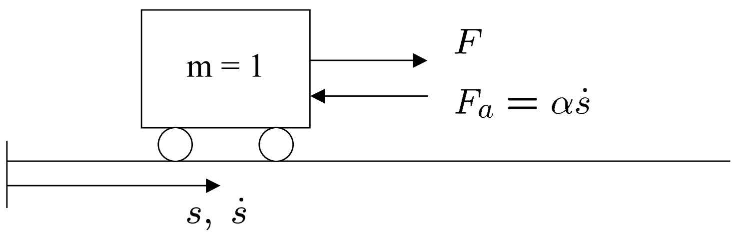
Testo con soluzione
III Appello di Fondamenti di Automatica - 13/9/2005
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri un carrello di massa unitaria ($m = 1$) che si muove su di una guida rettilinea orizzontale soggetto ad una forza F, in presenza di una forza di attrito F_a proporzionale alla velocità del carrello, con costante di proporzionalità $\alpha > 0$.
La posizione del carrello lungo la guida rettilinea è indicata con s.



1.1 Posto $x_1 = s$ e $x_2 = \dot{s}$, si scrivano le equazioni nelle variabili di stato x_1 e x_2 del sistema carrello con ingresso u dato dalla forza F e uscita y data dalla sua posizione s lungo la guida rettilinea.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + u$$
$$y = x_1$$

1.2 Si valutino le proprietà di stabilità del sistema.

Si tratta di un sistema lineare con matrice dinamica A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -\alpha(< 0)$. Per il criterio degli autovalori il sistema è semplicemente stabile.

1.3 Posto $\alpha = 3$, si determini l'espressione analitica del movimento libero dell'uscita del sistema, a partire dalla condizione iniziale $x_1(0) = x_2(0) = 3$.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -3x_2 + u$$
$$y = x_1$$

Calcoliamo prima il movimento libero della componente x_2 risolvendo

$$\dot{x}_2 = -3x_2, \ x_2(0) = 3.$$

Si ottiene:

$$x_2(t) = 3e^{-3t}, \ t \geq 0.$$

Sostituiamo questa espressione nell'equazione

$$\dot{x}_1 = x_2$$

ottenendo l'equazione che governa l'evoluzione di x_1

$$\dot{x}_1(t) = 3e^{-3t},\ x_1(0) = 3$$

Risolvendo questa equazione differenziale si ottiene:

$$x_1(t) = \int_0^t 3e^{-3\tau} d\tau + 3 = 4 - e^{-3t},\ t \geq 0,$$

da cui

$$y(t) = \int_0^t 3e^{-3\tau} d\tau + 3 = 4 - e^{-3t},\ t \geq 0.$$

1.4 Posto $\alpha = 3$, si consideri la legge di controllo in retroazione sull'uscita $u = ky + \bar{u}$, dove k e $\bar{u}$ sono dei parametri reali. Si determinino, se possibile, k e $\bar{u}$ in modo che il sistema carrello retroazionato si fermi nella posizione 2 ($\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 0$), qualunque siano la sua velocità e posizione iniziali.

Il sistema retroazionato diventa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + kx_1 + \bar{u} \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Affinchè il sistema carrello retroazionato si fermi nella posizione 2 qualunque siano le sue condizioni iniziali devo imporre che $\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 0$ sia stato di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

$\bar{x}_1 = 2$, $\bar{x}_2 = 0$ è equilibrio se

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -3\bar{x}_2 + k\bar{x}_1 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

cioè se $2k + \bar{u} = 0$.

Per quanto riguarda la globale asintotica stabilità basta imporre che gli autovalori della matrice del sistema lineare retroazionato

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & -3 \end{bmatrix}$$

siano a parte reale negativa.

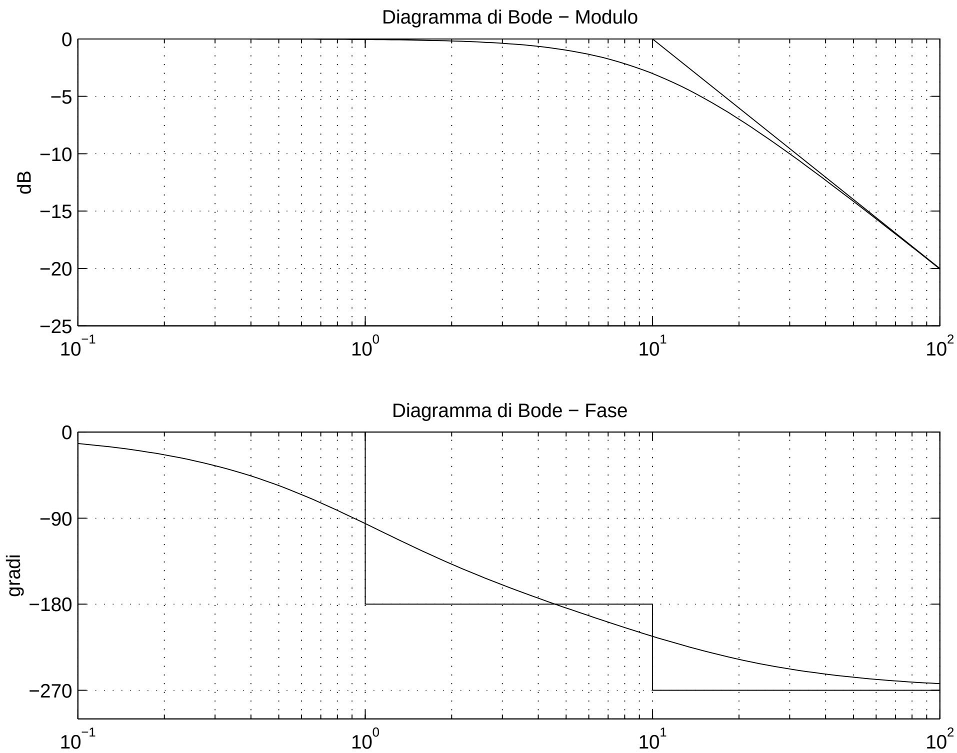
Il polinomio caratteristico di A_R è: $det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda - k$. Quindi deve essere $k < 0$.

In conclusione basta scegliere $\bar{u}$ e k in modo che

$$\begin{cases} k < 0 \\ 2k + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

per esempio: $k = -2$ e $\bar{u} = 4$.

2. In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile del 2^o ordine.



2.1 Si scriva l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$, indicando quanto valgono guadagno, tipo, poli e zeri.

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

Il guadagno è $\mu = 1$, il tipo è $g = 0$, ci sono due poli $p_1 = -1$ e $p_2 = -10$, ed uno zero in $z = 1$.

2.2 Si dica, giustificandola risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

a) la risposta allo scalino del sistema tende al valore 1 con andamento monotono;

falso perchè il sistema è a fase non minima e quindi la risposta allo scalino presenta una sottoelongazione prima di raggiungere il valore 1.

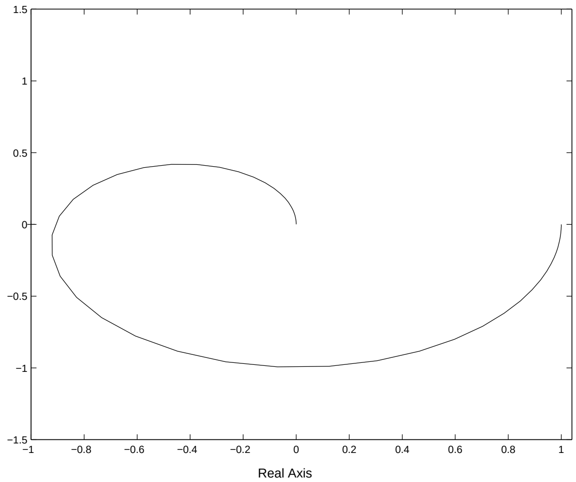
b) il transitorio si esaurisce in circa 50 unità di tempo;

falso perchè il polo dominante è $p_1 = -1$ con costante di tempo $\tau_1 = 1$.

c) la risposta di regime all'ingresso $sen(t)$ è $-cos(t)$.

vero perchè si vede dal diagramma di Bode che $|G(j1)| = 1$ e $\arg G(j1) = -\pi/2$, da cui per il teorema della risposta in frequenza la risposta di regime è $sen(t - \pi/2) = -cos(t)$.

2.3 Si tracci in modo qualitativo il diagramma polare associato alla funzione di trasferimento $G(s)$.



2.4 Si determini l'espressione analitica della risposta forzata del sistema all'ingresso e^t.

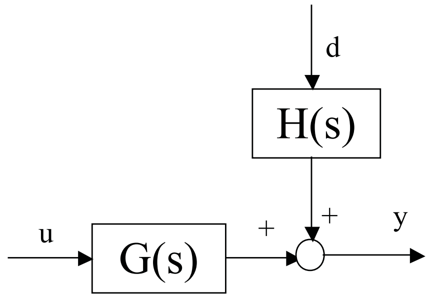
La trasformata di Laplace della uscita forzata è

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s-1} = -\frac{1}{(1+s)(1+0.1s)} = -\frac{10}{(1+s)(s+10)} = -\frac{10/9}{(1+s)} + \frac{10/9}{(s+10)}$$

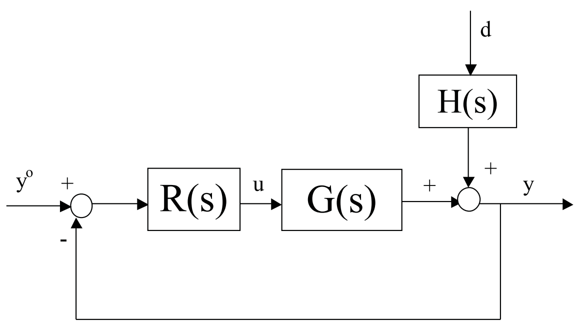
da cui si ottiene:

$$y(t) = -\frac{10}{9}e^{-t} + \frac{10}{9}e^{-10t},\ t \geq 0.$$

3. Si consideri il sistema in figura, dove l'ingresso u rappresenta la variabile di controllo, d un disturbo, e i due sistemi con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$ e $H(s) = \frac{1}{s+1}$ sono entrambi completamente raggiungibili ed osservabili.



3.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ di un regolatore da inserire nello schema in figura in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
i) se $y^o(t) = y^o sca(t)$, $y(t)$ tende asintoticamente a y^o $(d = 0)$ in circa 0,5 unità di tempo;
ii) il margine di fase ϕ_m è maggiore o uguale a $\frac{\pi}{4}$;
iii) il regolatore ha ordine minimo.



$$R(s) = \frac{1+s}{s}$$

3.2 Dire, motivando la risposta, quanto vale l'ampiezza massima a regime dell'errore di inseguimento $e(t) = y^{\circ}(t) - y(t)$ quando $d(t) = sen(0.1t)$ e $y^{\circ}(t) = 0$, $t \geq 0$, per il sistema retroazionato progettato al punto 3.1 (suggerimento: si valuti quale è l'andamento di regime dell'uscita del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$).

La funzione di trasferimento tra d e e è

$$F_d(s) = \frac{H(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Per il teorema della risposta in frequenza a regime e è sinusoidale di ampiezza

$$|F_d(j0.1)| = |H(j0.1)| |\frac{1}{1 + R(j0.1)G(j0.1)}| \simeq 0.01$$

4. Con riferimento ad un sistema del 1^o ordine della forma:

$$\dot{x} = f(x) + u$$
$$y = x$$

a) Si scriva l'espressione del sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio $\bar{x}$ associato ad un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $\forall t$.

$$\dot{\Delta x} = \frac{df}{dx}(\bar{x})\Delta x + \Delta u$$
$$\Delta y = \Delta x$$

b) Si supponga che esistano due punti di equilibrio $\tilde{x}$ e $\bar{x}$ ($\tilde{x} \neq \bar{x}$) associati all'ingresso costante $u(t) = 1$, $\forall t$, e che $\frac{df}{dx}(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(\tilde{x}) \neq 0$.

Si dica, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere:

i) se il punto di equilibrio $\tilde{x}$ associato a $u(t) = 1$, $\forall t$, è instabile, allora il punto di equilibrio $\bar{x}$ associato a $u(t) = 1$, $\forall t$, è anch'esso instabile.

vero perchè $\frac{df}{dx}(\tilde{x}) \neq 0$ da cui, essendo $\tilde{x}$ instabile deve essere $\frac{df}{dx}(\tilde{x}) > 0$, e quindi $\frac{df}{dx}(\bar{x}) > 0$.

ii) se il punto di equilibrio $\tilde{x}$ associato a $u(t) = 1$, $\forall t$, è asintoticamente stabile, allora è globalmente asintoticamente stabile.

falso perchè se si perturba la condizione iniziale del movimento di equilibrio $x(t) = \tilde{x}$, $t \geq 0$, associato a $u(t) = 1$, $t \geq 0$, ponendola uguale a $\bar{x}$ si permane in $\bar{x}$ in quanto è anch'esso stato di equilibrio associato all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$.