Testo con soluzione
I Appello di Fondamenti di Automatica - 15/2/2005
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_1 + x_2 + u + 1 \\
\dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + u \\
y &= x_1 + x_2
\end{aligned}
$$

1.1 Determinare il movimento di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = -1, \forall t$, e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad esso.

Ponendo a zero le derivate $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ con $u(t) = -1, \forall t$ si ottiene il sistema di equazioni:

$$
\begin{cases}
-\bar{x}_1^3 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0 \\
\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 1 = 0
\end{cases}
$$

da cui si ricava lo stato di equilibrio $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$. L'uscita di equilibrio corrispondente è $\bar{y} = 1$.
Il movimento di equilibrio dello stato associato a $u(t) = -1$, $\forall t$, è

$$
\begin{cases}
x_1(t) = 1 \\
x_2(t) = 0
\end{cases}
\quad \forall t
$$

Il movimento di equilibrio dell'uscita è $y(t) = 1$, $\forall t$.

Le equazioni del sistema linearizzato attorno al movimento di equlibrio calcolato sono

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x}_1(t) &= -2\Delta x_1(t) + \Delta x_2(t) + \Delta u(t) \\
\Delta\dot{x}_2(t) &= \Delta x_1(t) + \Delta x_2(t) + \Delta u(t) \\
\Delta y(t) &= \Delta x_1(t) + \Delta x_2(t)
\end{aligned}
$$

1.2 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio calcolato al punto 1.1.

La matrice dinamica A del sistema linearizzato è:

$$
A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Il polinomio caratteristico di A è: $det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda - 3$. Gli autovalori di A sono quindi $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{13}/2$. Dato che uno di essi è a parte reale positiva, allora per il criterio degli autovalori il sistema linearizzato è instabile. Questa è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio calcolato al puto 1.1 è instabile.

2. Si consideri il sistema lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -3x_2 + 3u \\ y &= x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

2.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema (1) quando l'ingresso applicato è $u(t) = 2$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$.

Dato che $y = x_2$ e il movimento della variabile di stato x_2 non dipende da x_1, allora basta risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 3u(t)$$

con $u(t) = 2$, $t \geq 0$ e $x_2(0) = 1$. La soluzione è

$$y(t) = x_2(t) = e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} 6 d\tau = 2 - e^{-3t},\ t \geq 0$$

2.2 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema (1) con ingresso u ed uscita y.

Dalla trasformazione di uscita si ha

$$Y(s) = X_2(s)$$

Riscrivendo la seconda equazione di stato nel dominio delle trasformate con condizione iniziale nulla si ottiene

$$X_2(s) = \frac{3}{s+3} U(s)$$

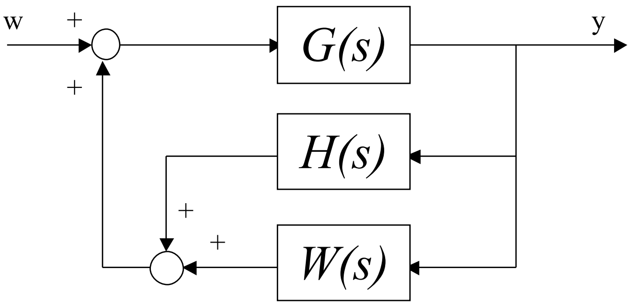
Quindi

$$Y(s) = \frac{3}{s+3} U(s)$$

da cui

$$G(s) = \frac{3}{s+3}$$

2.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato secondo lo schema in figura dove $H(s) = -\frac{1}{s+2}$ e $W(s) = -\frac{1}{s+4}$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi completamente raggiungibili ed osservabili.



Determinare la funzione di trasferimento $S(s)$ del sistema con ingresso w ed uscita y.

$$S(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)(W(s) + H(s))} = \frac{3(s+2)(s+4)}{(s+3)(s^2+6s+14)}$$

2.4 Dire, motivando la risposta, se il sistema con ingresso w ed uscita y è asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento $S(s)$ trovata ha 3 poli, un polo è uguale a -3, gli altri due sono le radici di $(s^2 + 6s + 14)$. Per il criterio di Routh questi ultimi sono entrambi a parte reale negativa. L'ordine del sistema è 4 perchè il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ ha ordine 2, quelli con funzione di trasferimento $H(s)$ e $W(s)$ hanno ordine 1. Per valutare la stabilità dobbiamo risalire all'autovalore nascosto. Il sistema (1) con funzione di trasferimento $G(s)$ ha ordine 2, mentre $G(s)$ ha un solo polo in -3. L'autovalore nascosto è quindi l'autovalore di questo sistema che non è polo di $G(s)$. La matrice dinamica A del sistema (1) è:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

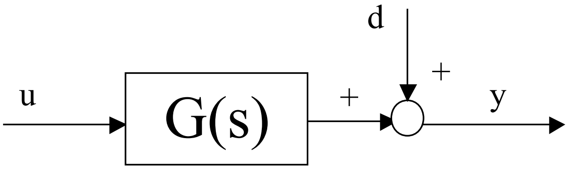
da cui segue chel'autovalore nascosto è uguale a -2.

Per il criterio degli autovalori il sistema con funzione di trasferimento $S(s)$ è asintoticamente stabile.

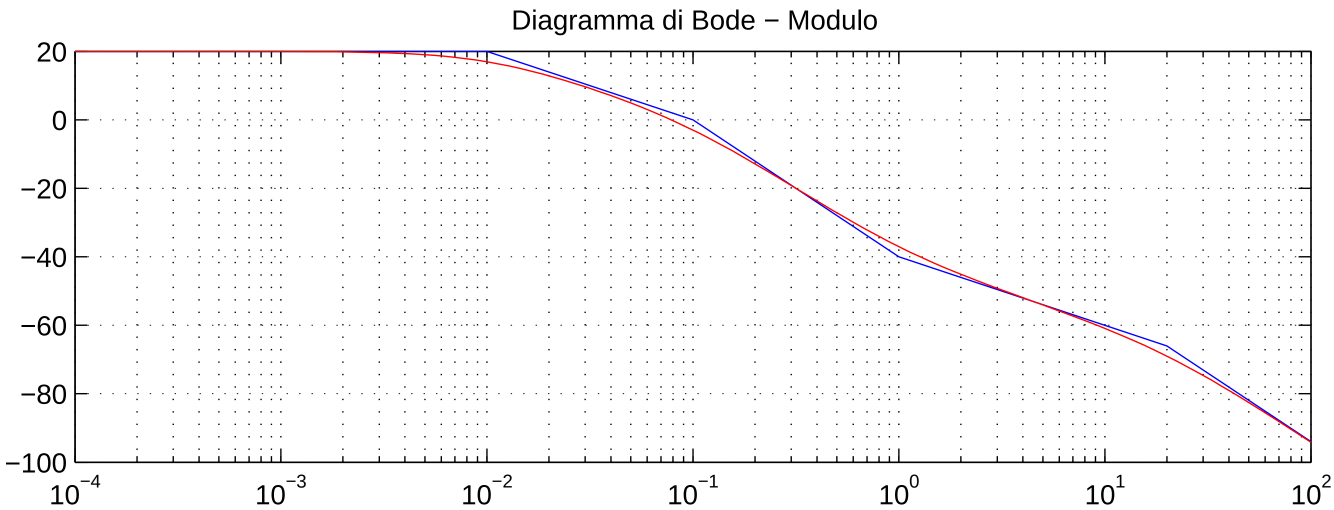
3. Si consideri lo schema in figura dove

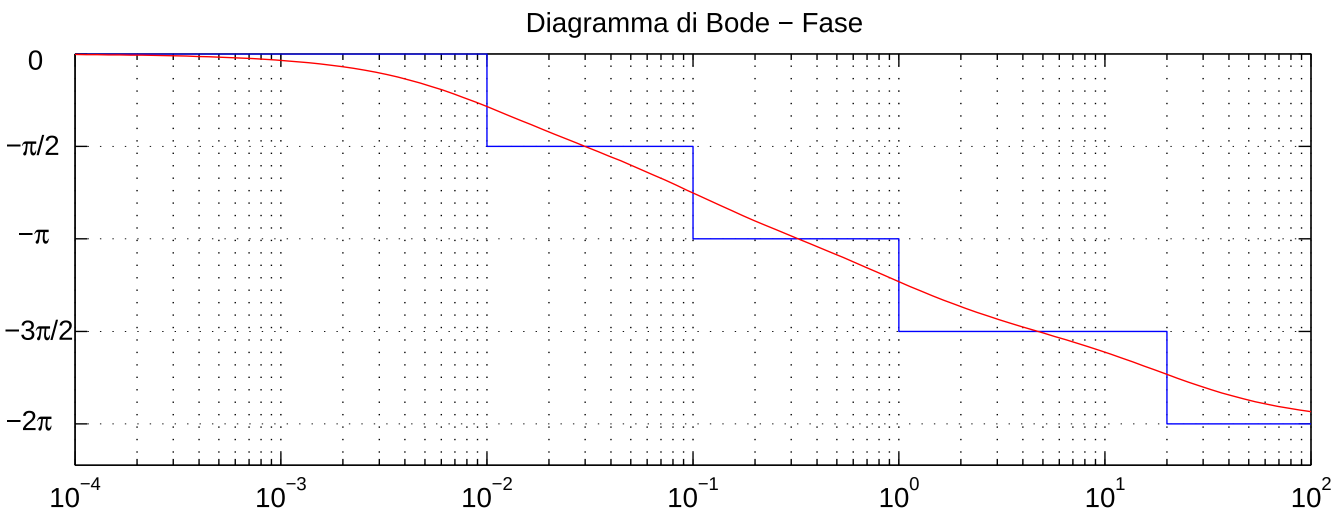
$$G(s) = 10\frac{1-s}{(1+\frac{s}{0.01})(1+\frac{s}{0.1})(1+\frac{s}{20})}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita.



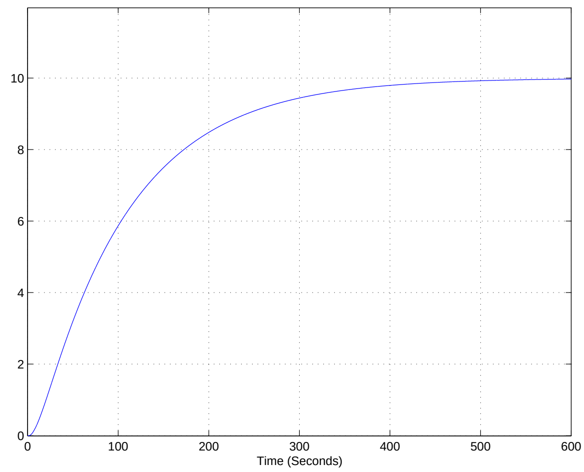
3.1 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici ed esatti della risposta in frequenza associata a $G(s)$.

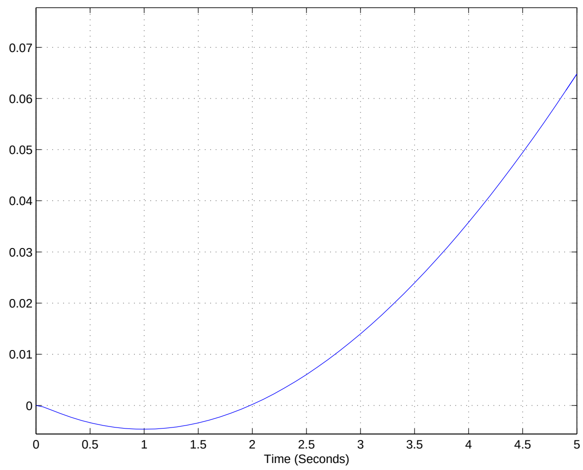




3.2 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$.

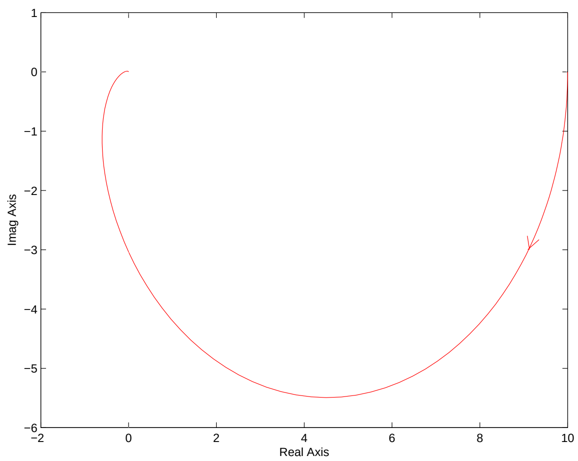
Dato che il disturbo additivo è nullo, basta tracciare la risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$. Dato che i poli di $G(s)$ sono tutti reali negativi, la risposta allo scalino si assesta al guadagno $G(0) = 10$ senza oscillazioni ripetute in un tempo di assestamento all'1% pari a circa 5 volte la costante del polo dominante in -0.01 e cioè in circa 500 unità di tempo. Il sistema è a fase non minima, quindi la risposta allo scalino presenterà una sottoelongazione. Dato che lo zero interviene a pulsazione elevata rispetto al polo dominante, la sottoelengazione sarà di entità ridotta (si riporta nella figura a destra l'ingrandimento della risposta iniziale).

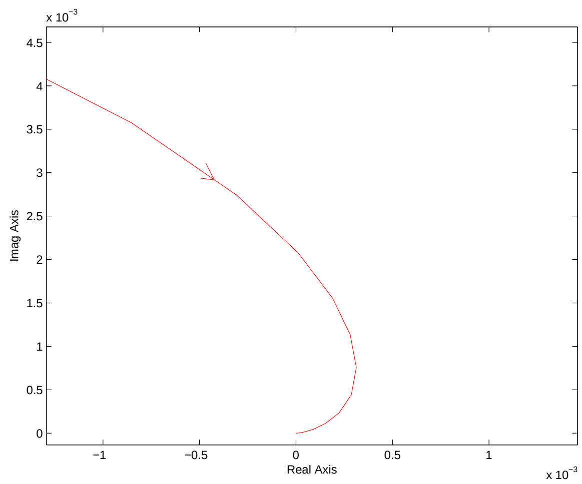




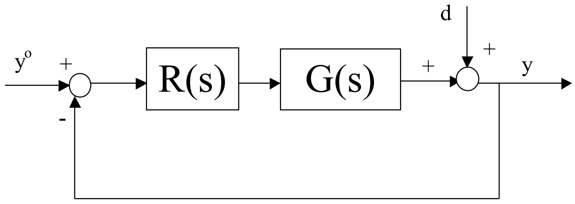
3.3 Tracciare il diagramma polare di $G(s)$.

Fase e modulo sono entrambi decrescenti. Il diagramma polare arriva nell'origine con tangente orizzontale (si riporta nella figura a destra l'ingrandimento del diagramma in prossimità dell'origine).





3.4 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.



Progettare $R(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) l'errore di inseguimento $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, tende a zero senza oscillazioni ripetute in circa 50 secondi;

ii) il regolatore ha ordine al più uguale a due.

Dal requisito i) segue che:

1. l'errore a transitorio esaurito quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$ deve essere nullo. Questo requisito di tipo statico comporta la necessità di introdurre un integratore in $R(s)$.

2. la modalità di risposta "senza oscillazioni ripetute" si ottiene garantendo un margine di fase $\varphi_m > \pi/3$. In questo modo il sistema retroazionato si può approssimare ad un filtro passa basso del I ordine con polo reale in $-\omega_c$. Dato che si richiede un tempo di assestamento di circa 50 secondi allora $5/\omega_c \simeq 50$ da cui $\omega_c \simeq 0.1$.

Dal requisito ii) segue che si possono inserire in $R(s)$ al più due zeri e due poli.

Consideriamo come regolatore di tentativo $R(s) = \frac{1}{s}$.

Alla pulsazione $\omega = 0.1$, contribuiscono alla fase di $R(j\omega)G(j\omega)$ tutte le singolarità con modulo inferiore a $\omega = 1$ (le altre danno un contributo trascurabile). Per quanto riguarda $G(s)$ contribuiscono i poli in -0.01 e -0.1 che danno rispettivamente uno sfasamento di circa $-\pi/2$ e di $-\pi/4$. Per quanto riguarda $R(s)$ il polo in 0 dà un contributo di $-\pi/2$.

Dato che si desidera $\varphi_m > \pi/3$, bisogna compensare il contributo di entrambi i poli in -0.1 e -0.01 di $G(s)$, per esempio introducendo due zeri in -0.1 e -0.01:

$$R(s) = \frac{(1 + s/0.1)(1 + s/0.01)}{s}$$

Se si tracciano i diagrammi di Bode di $R(j\omega)G(j\omega)$ si osserva che è necessario porre il guadagno di $R(s)$ uguale a $1/10$ per ottenere $\omega_c = 0.1$.

$$R(s) = \frac{(1 + s/0.1)(1 + s/0.01)}{10s}$$

La $R(s)$ così progettata non è propria. Aggiungiamo quindi un polo due decadi oltre $\omega_c = 0.1$ ottenendo

$$R(s) = \frac{(1 + s/0.1)(1 + s/0.01)}{10s(1 + s/10)}.$$

3.5 Dire, motivando la risposta, quanto vale l'ampiezza massima a regime dell'errore di inseguimento $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ quando $d(t) = sen(0.01t) + 2sca(t)$ e $y^\circ(t) = 0$, $t \geq 0$, per il sistema retroazionato progettato al punto 3.4.

La funzione di trasferimento tra d ed e è $H_d(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$. Il sistema è asintoticamente stabile. Allora per il teorema della risposta in frequenza a regime si ha che il contributo all'errore di $d_1(t) = sen(0.01t)$ è:

$$e_{1,\infty}(t) = |H_d(j0.01)| sen(0.01t + \arg H_d(j00.1))$$

la cui ampiezza è

$$|H_d(j0.1)| = \frac{1}{|1 + L(j0.01)|} \simeq 0.1$$

Per quanto riguarda il contributo di $d_2(t) = 2sca(t)$, applicando il teorema del valore finale si ottiene

$$e_{2,\infty} = \lim_{s \to 0} 2H_d(s) = 0$$

L'ampiezza massima a regime di $e(t)$ è quindi circa 0.1.

4. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Enunciare con precisione il criterio di Bode.

Si veda il libro di testo.

b) Scrivere le istruzioni Matlab per il tracciamento del diagramma di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 10s + 2}$$

Si veda il materiale relativo alle esercitazioni di laboratorio.