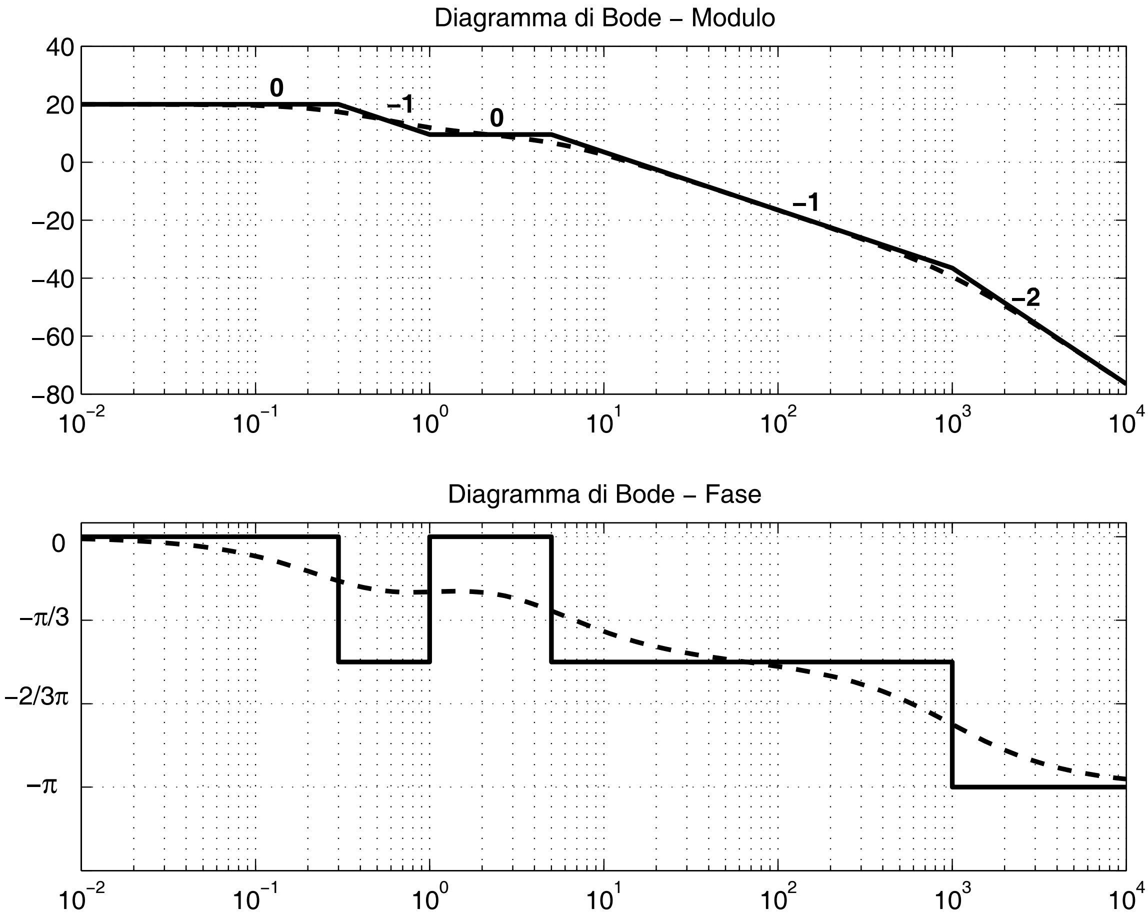
Testo con soluzione
II prova in itinere di Fondamenti di Automatica - 2/2/2005
Prof. Maria Prandini

1. In figura sono riportati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante completamente raggiungibile ed osservabile con ingresso u ed uscita y.



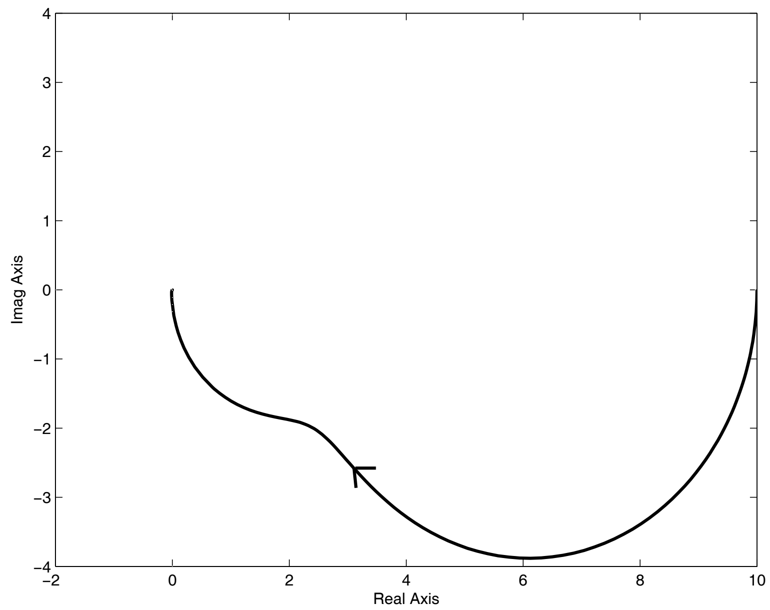
1.1 Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$.

$$G(s) = 10 \frac{(1+s)}{(1+\frac{s}{0.3})(1+\frac{s}{5})(1+\frac{s}{1000})}$$

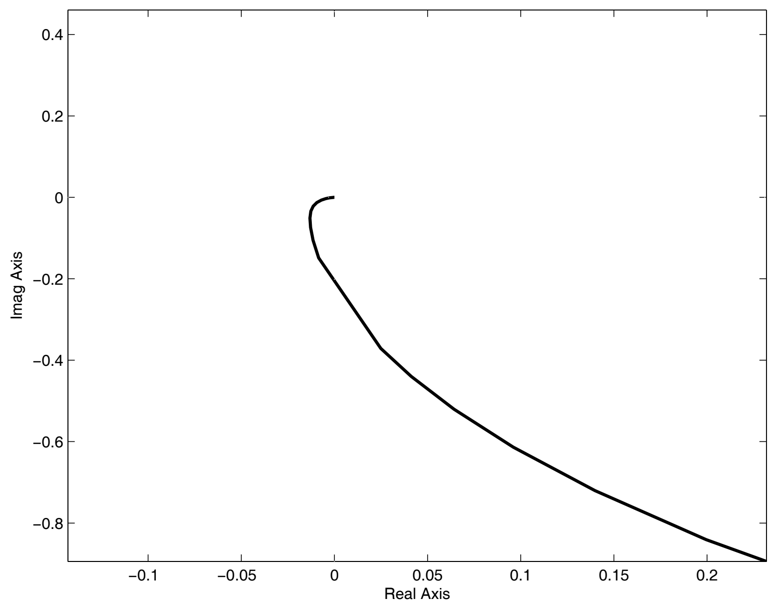
1.2 Determinare l'espressione analitica della risposta a regime del sistema quando il segnale di ingresso è $u(t) = 2 + sen(0.01t)$.

$$y_\infty(t) = 2G(0) + |G(j0.01)| sen(0.01t + \arg G(j0.01)) \simeq 20 + 10 sen(0.01t)$$

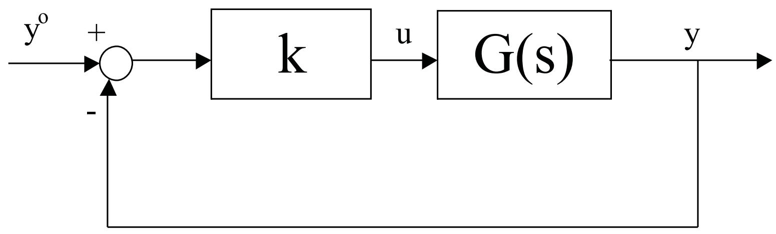
1.3 Tracciare il diagramma polare di $G(s)$.



Si riporta qui sotto un ingrandimento relativo ad un intorno dell'origine.



1.4 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato secondo lo schema in figura, dove k è un numero reale positivo ($k > 0$).



a) Dire, motivando la risposta, per quali valori di $k > 0$ è possibile applicare il criterio di Bode per l'analisi di stabilità del sistema retroazionato, e per quali di essi il sistema retroazionato risulta essere asintoticamente stabile.

Le condizioni di applicabilità del criterio di Bode sono:

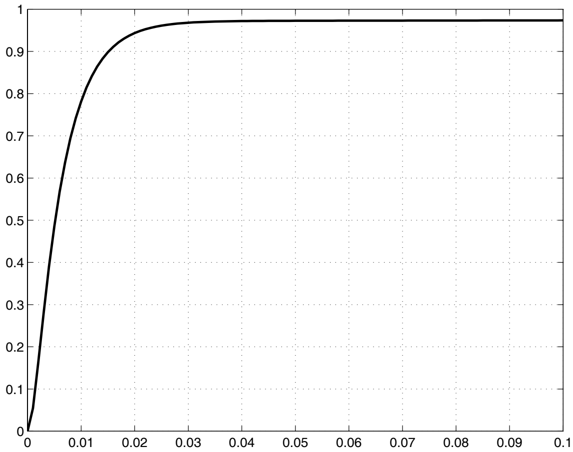
1) il sistema non ha parti nascoste instabili;

2) $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva; 3) la pulsazione critica è ben definita

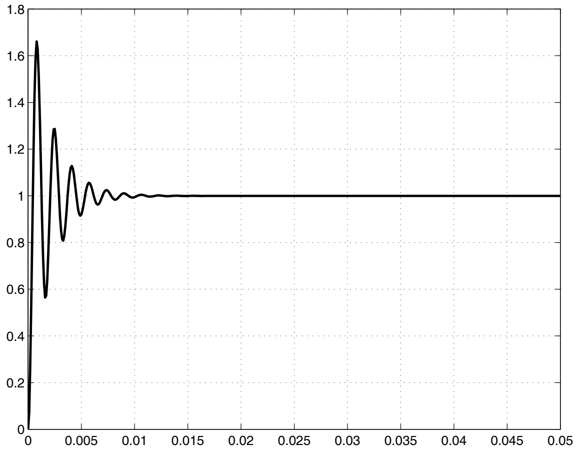
Le condizioni 1 e 2 sono verificate per ogni valore di $k > 0$. La condizione 3 è soddisfatta per $k > 0.1$.

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per ogni valore di $k > 0.1$. Questo per il criterio di Bode dato che i) il guadagno di $kG(s)$ è positivo per ogni $k > 0$ e
ii) la fase di $kG(j\omega)$ con $k > 0$ è uguale a quella di $G(j\omega)$ ed è quindi sempre maggiore di $-\pi$. Ciò implica che indipendentemente dal valore della pulsazione critica il margine di fase è sempre positivo.

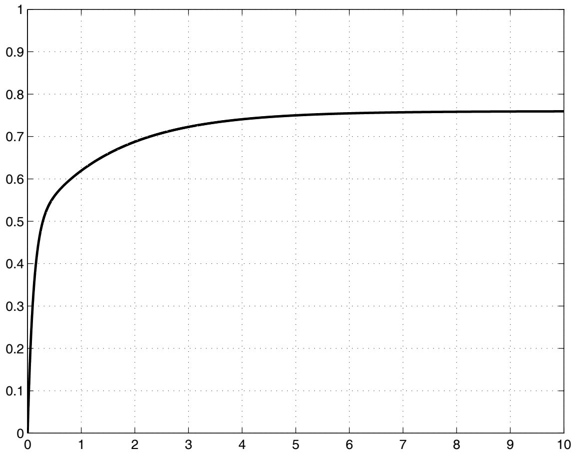
b) In figura sono riportate le risposte forzate $y(t)$, $t \geq 0$, del sistema retroazionato ottenute per quattro diversi valori di k, quando l'ingresso applicato è $y^\circ(t) = sca(t)$. I valori di k considerati sono: $1/\sqrt{10}$, 10, 100, e 1000. Dire, motivando la risposta, a quale valore di k corrisponde ognuna delle risposte in figura.



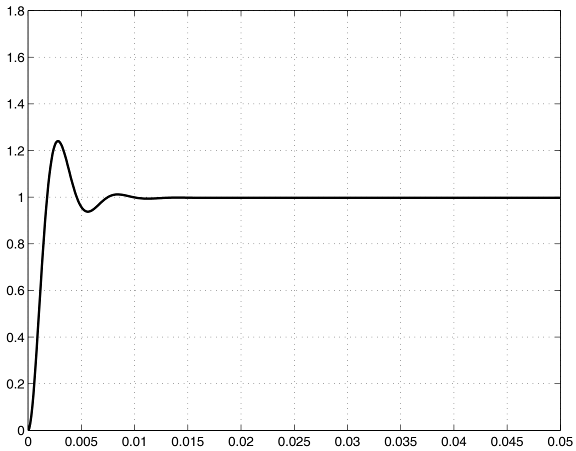
(a)



(b)



(c)



(d)

Per i valori di k indicati sono soddisfatte le condizioni di applicabilità del criterio di Bode ed il sistema è asintoticamente stabile.

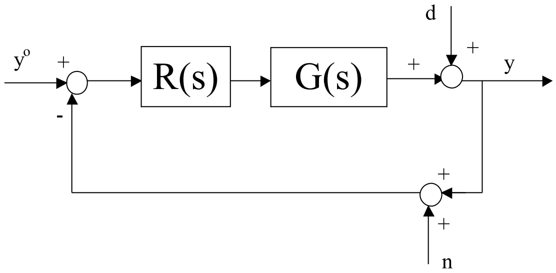
Per $k = 1/\sqrt{10}$ (-10dB) e $k = 10$ (20dB) il margine di fase φ_m di $kG(s)$ è $> \pi/3$. Quindi, ai fini della valutazione della risposta allo scalino, il sistema si può approssimare con un sistema con un polo dominate reale in $-\omega_c$. Ciò significa che la risposta allo scalino non presenta oscillazioni ripetute. Inoltre, maggiore è il valore della pulsazione critica ω_c, minore è il tempo di assestamento. Si può quindi concludere che la risposta (c) è associata a $k = 1/\sqrt{10}$ e la risposta (a) a $k = 10$.

Per $k = 100$ (40dB) e $k = 1000$ (60dB) il margine di fase φ_m di $kG(s)$ è $< \pi/3$. Quindi, ai fini della valutazione della risposta allo scalino, il sistema si può approssimare con un sistema con due poli complessi coniugati con pulsazione naturale ω_c e smorzamento $\xi = sen(\varphi_m/2)$. Minore è il margine di fase ϕ_m, minore è ξ, e quindi maggiore è la sovraelongazione massima percentuale. Si può quindi concludere che la risposta (d) è associata a $k = 100$ e la risposta (b) a $k = 1000$.

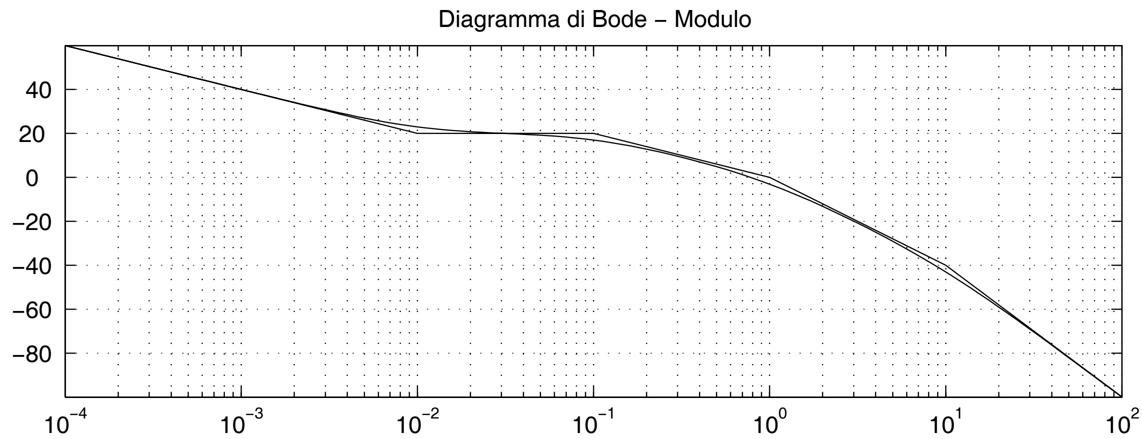
2. Si consideri lo schema di controllo in figura, dove

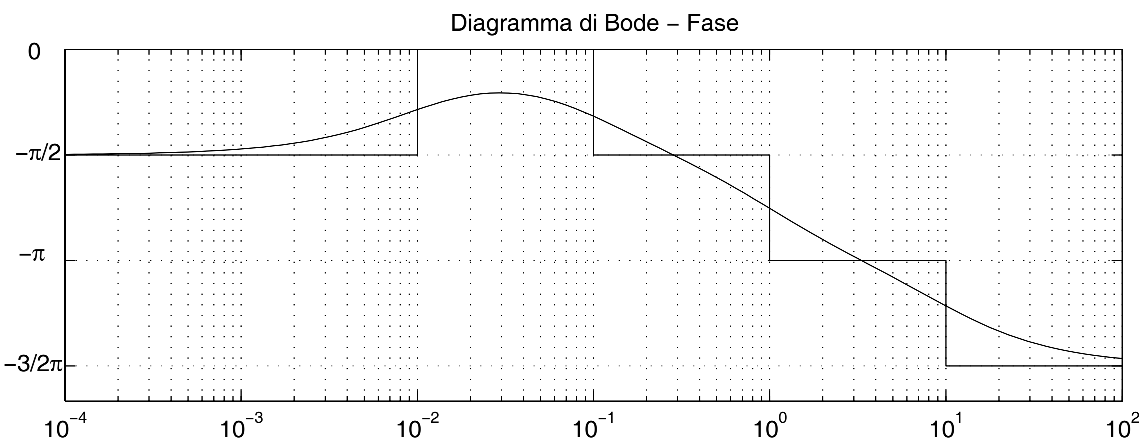
$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+s)(1+0.1s)} \qquad R(s) = \frac{1+100s}{10s}$$

sono rispettivamente le funzioni di trasferimento di un sistema di ordine 3 e di un regolatore PI.



2.1 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici e reali della risposta in frequenza associata a $L(s) = G(s)R(s)$.





2.2 Verificare che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Il criterio di Bode è applicabile (non ci sono parti nascoste instabili nè poli a parte reale positiva, la pulsazione critica è ben definita). Il guadagno generalizzato di $L(s)$ è positivo. Il margine di fase è positivo. Quindi il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

2.3 Dire, motivando la risposta, quanto vale l'ampiezza a regime dell'errore di inseguimento $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ nei seguenti casi:

(a) $d(t) = sen(0.1t)$ e $n(t) = y^\circ(t) = 0$, $t \geq 0$

(b) $n(t) = sen(10t)$ e $d(t) = y^\circ(t) = 0$, $t \geq 0$

(a) La funzione di trasferimento tra d ed e è $H_d(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$. Il sistema è asintoticamente stabile. Allora per il teorema della risposta in frequenza a regime si ha:

$$e_\infty(t) = |H_d(j0.1)| sen(0.1t + \arg H_d(j0.1))$$

L'ampiezza a regime dell'errore di inseguimento è quindi

$$|H_d(j0.1)| = \frac{1}{|1 + L(j0.1)|} \simeq 0.1$$

Il disturbo d in linea di andata è in banda e viene quindi attenuato.

(b) La funzione di trasferimento tra n ed e è $H_n(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$. Il sistema è asintoticamente stabile. Allora per il teorema della risposta in frequenza a regime si ha:

$$e_\infty(t) = |H_n(j10)| sen(10t + \arg H_n(j10))$$

L'ampiezza a regime dell'errore di inseguimento è quindi

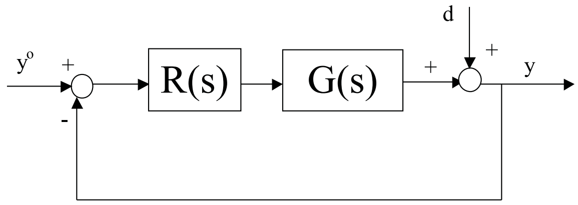
$$|H_n(j10)| = \frac{|L(j10)|}{|1 + L(j10)|} \simeq 0.01$$

Il disturbo n in linea di retroazione è fuori banda e viene quindi attenuato.

3. Si consideri lo schema di controllo in figura dove

$$G(s) = \frac{1 + 0.1s}{(1 + 10s)(1 + s)(1 + 0.01s)}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita e $R(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore da progettare.



Determinare $R(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) se $y°(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, allora $y(t)$ si assesta al valore 1 senza oscillazioni ripetute, in un tempo pari a circa 5 secondi;

ii) il disturbo $d(t) = sen(0.05t)$ viene attenuato di un fattore pari ad almeno 10;

iii) il regolatore ha ordine minimo.

Dal requisito i) segue che:

1. l'errore a transitorio esaurito quando $y°(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$ deve essere nullo. Questo requisito di tipo statico comporta la necessità di introdurre un integratore in $R(s)$.

2. la modalità di risposta "senza oscillazioni ripetute" si ottiene garantendo un margine di fase $\varphi_m > \pi/3$. In questo modo il sistema retroazionato si può approssimare ad un filtro passa basso del I ordine con polo reale in $-\omega_c$. Dato che si richiede un tempo di assestamento di circa 5 secondi allora $5/\omega_c \simeq 5$ da cui $\omega_c \simeq 1$.

Dal requisito ii) segue che $\omega = 0.05$ deve essere inferiore ad ω_c e $|L(j0.05)|$ deve essere almeno pari a 10. In questo modo il disturbo in linea di andata $d(t) = sen(0.05t)$ a regime dà un contributo sull'uscita sinuoidale di ampiezza pari a $\frac{1}{|1+L(j0.05)|} \leq 0.1$.

Consideriamo come regolatore di tentativo $R(s) = \frac{1}{s}$.

Alla pulsazione $\omega = 1$, contribuiscono alla fase di $R(j\omega)G(j\omega)$ tutte le singolarità con modulo inferiore a $\omega = 10$. Per quanto riguarda $G(s)$ contribuiscono i poli in -0.1 e -1 che danno rispettivamente uno sfasamento di circa $-\pi/2$ e $-\pi/4$. Per quanto riguarda $R(s)$ il polo in 0 dà un contributo di $-\pi/2$.

Dato che si desidera $\varphi_m > \pi/3$, bisogna compensare il contributo di entrambi i poli in -0.1 e -1 di $G(s)$, per esempio introducendo due zeri in -0.1 e -1:

$$R(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + s)}{s}$$

Se si tracciano i diagrammi di Bode di $R(j\omega)G(j\omega)$ si osserva che risultano essere soddisfatti tutti i requisiti.

La $R(s)$ così progettata non è propria. Aggiungiamo quindi un polo due decadi oltre $\omega_c = 1$ ottenendo

$$R(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + s)}{s(1 + 0.01s)}.$$

4. Con riferimento all'esercitazione sperimentale svolta in laboratorio, descrivere brevemente il problema di controllo affrontato, specificando variabili di controllo e controllate, e disturbi.

Si veda il materiale relativo all'esercitazione di laboratorio n. 4.