Testo con soluzione
I appello di Fondamenti di Automatica - 23/2/2006
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1 = -x_1^5 - 2x_1 + x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1^5 - x_2 - u$$
$$y = x_1$$

1.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema è lineare o non lineare, statico o dinamico, tempo variante o tempo invariante, strettamente proprio o proprio.

Il sistema è:
non lineare, perchè il secondo membro delle equazioni di stato non è una combinazione lineare delle variabili di stato e dell'ingresso.
dinamico, perchè l'uscita al generico istante t non può essere determinata sulla base della conoscenza del solo ingresso allo stesso istante t.
tempo invariante, perchè i coefficienti delle equazioni del sistema non dipendono dal tempo.
strettamente proprio, perchè nella trasformazione di uscita non compare l'ingresso.

1.2 Determinare il movimento di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = 2, \forall t$, e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad esso.

Il valore dell'equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato calcolati ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 2$, $\forall t$.

$$\begin{cases} -\bar{x}_1^5 - 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2 = 0 \\ \bar{x}_1^5 - \bar{x}_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = -2 \end{cases}$$

Le equazioni del sistema linearizzato sono:

$$\Delta\dot{x}_1 = -2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta u$$
$$\Delta\dot{x}_2 = -\Delta x_2 - \Delta u$$
$$\Delta y = \Delta x_1$$

1.3 Dire se è possibile valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio calcolato al punto 1.2 tramite l'analisi di stabilità del sistema linearizzato corrispondente.

La matrice dinamica del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono reali negativi. Questa è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio è asintoticamente stabile.

2. Si consideri il sistema lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -10x_1 - x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + u \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema (1) quando l'ingresso applicato è $u(t) = 3$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.

La seconda equazione di stato non dipende dalla prima. $\bar{x}_2 = 3$ è il valore di equilibrio di x_2 associato a $u(t) = 3, \forall t$. Il movimento di x_2 associato a $u(t) = 3$, $t \geq 0$, e $x_2(0) = 3$ è quindi $x_2(t) = 3$, $t \geq 0$. Sostituito nella prima equazione con $u(t) = 3$, $t \geq 0$, si ha

$$\dot{x}_1 = -10x_1.$$

Il movimento di x_1 è quindi il movimento libero associato a $x_1(0) = 2$, cioè

$$x_1(t) = 2e^{-10t},\ t \geq 0.$$

Dalla trasformazione di uscita segue:

$$y(t) = 2e^{-10t},\ t \geq 0.$$

2.2 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema (1) con ingresso u ed uscita y.

$$sX_2(s) = -X_2(s) + U(s)$$

da cui

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}U(s).$$

$$sX_1(s) = -10X_1(s) - \frac{1}{s+1}U(s) + U(s),$$

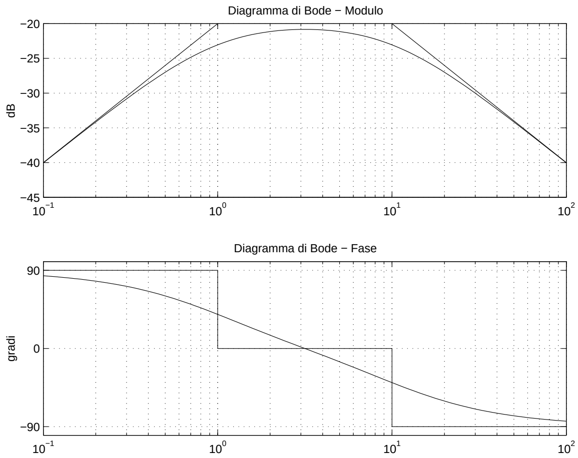
da cui

$$Y(s) = X_1(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}U(s).$$

La funzione di trasferimento è quindi:

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}.$$

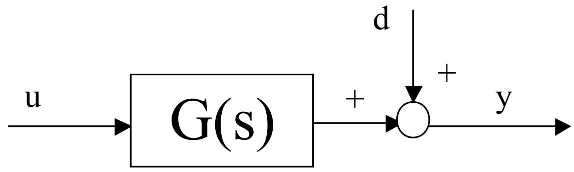
2.3 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici ed esatti della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolata al punto 2.2.



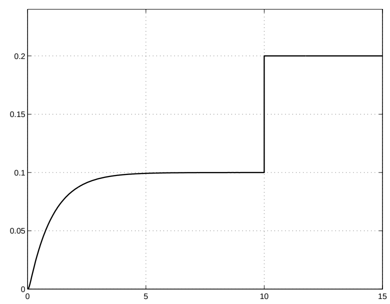
3. Si consideri lo schema in figura dove

$$G(s) = 200\frac{1}{(s+1)(s+20)(s+100)}$$

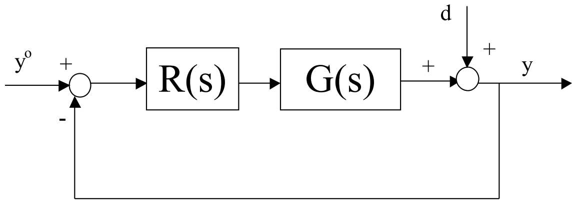
è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita.



3.1 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0.1sca(t-10)$, $t \geq 0$.



3.2 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.



Progettare $R(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) l'errore di inseguimento $e(t) = y°(t) - y(t)$ quando $y°(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, tende a zero;

ii) il margine di fase è circa $\pi/2$;

iii) la pulsazione critica è circa 10.

$$R(s) = 100\frac{(1+s)(1+s/20)}{s(1+s/1000)}$$

3.3 Dire, motivando la risposta, quanto vale l'ampiezza massima a regime dell'uscita $y(t)$ quando $d(t) = 0.2sen(1000t)$ e $y°(t) = 0$, $t \geq 0$, per il sistema retroazionato progettato al punto 3.2.

La funzione di traferimento da d a y è

$$H(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Per il teorema della risposta in frequenza l'ampiezza massima a regime di $y(t)$ è $0.2|H(j1000)| \simeq 0.2$.

4. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Descrivere quale è la struttura di un regolatore PID, specificando il ruolo svolto dalle azioni proporzionale, integrale e derivativa.

Si veda il libro di testo.

b) Scrivere le istruzioni Matlab per visualizzare la risposta forzata allo scalino del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+1}.$$

Si vedano i lucidi delle esercitazioni di laboratorio.