Testo con soluzione
II Appello di Fondamenti di Automatica - 11/7/2006
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1 = x_2^2 + 2x_1 + 2u$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2$$
$$y = x_2$$

1.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dello stato e dell'uscita associati all'ingresso costante $u(t) = 1, t \geq 0$, e alla condizione iniziale $x_1(0) = -1+\epsilon$ e $x_2(0) = 0$, dove ϵ è un parametro reale.

La soluzione della seconda equazione di stato associata a $x_2(0) = 0$ è $x_2(t) = 0$, $t \geq 0$. Da cui $y(t) = x_2(t) = 0$, $t \geq 0$.

Sostituisco $x_2(t) = 0$, $t \geq 0$ nella prima equazione di stato ottenendo

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 2u$$

La soluzione di tale equazione (lineare) associata a $x_1(0) = -1 + \epsilon$ e $u(t) = 1$, $t \geq 0$ è:

$$x_1(t) = e^{2t}(-1+\epsilon) + \int_0^t e^{2(t-\tau)} 2d\tau = -1 + \epsilon e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

1.2 Determinare lo stato di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ associato all'ingresso costante $u(t) = 1, \forall t$.

Il valore dell'equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato calcolato ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 1$, $\forall t$.

$$\begin{cases} \bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_1 + 2 = 0 \\ -2\bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

1.3 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio calcolato al punto 1.2.

I modo:

Il movimento di equilibrio è il movimento associato alla condizione iniziale $x_1(0) = -\frac{1}{2}$ e $x_2(0) = 0$ e all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$. Osserviamo che il movimento calcolato al punto 1.1 è ottenuto perturbando la condizione iniziale di tale movimento. La differenza tra questo movimento perturbato e movimento di equilibrio è dato da:

$$\begin{cases} x_1(t) - (-1) = \epsilon e^{2t} \\ x_2(t) - 0 = 0 \end{cases}, \quad t \geq 0$$

che per $\epsilon \neq 0$ diverge. Il movimento di equilibrio è quindi instabile.

II modo:

Le equazioni del sistema linearizzato attorno all'equilibrio calcolato al 1.2 sono:

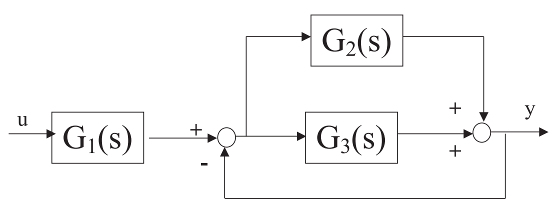
$$
\begin{aligned}
\Delta \dot{x}_1 &= 2\Delta x_1 + 2\Delta u \\
\Delta \dot{x}_2 &= -2\Delta x_2 \\
\Delta y &= \Delta x_2
\end{aligned}
$$

La matrice dinamica del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Un autovalore di A è reale positivo. Questa è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio è instabile.

2. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1^o ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



2.1 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = G_1(s)\frac{G_2(s) + G_3(s)}{1 + G_2(s) + G_3(s)}$$

2.2 Posto $G_1(s) = \frac{s+4}{s+2}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$, $G_3(s) = \frac{2}{s+1}$ nell'espressione calcolata al punto precedente:
(a) verificare che $H(s) = \dfrac{3}{s+2}$;
(b) verificare che il sistema con ingresso u ed uscita y è asintoticamente stabile.

(a) Si ha che $G_2(s) + G_3(s) = \frac{3}{s+1}$, da cui:

$$H(s) = \frac{s+4}{s+2}\frac{\frac{3}{s+1}}{1 + \frac{3}{s+1}} = \frac{s+4}{s+2}\frac{3}{s+4} = \frac{3}{s+2}$$

(b) Il sistema con ingresso u ed uscita y è di ordine 3. $H(s)$ presenta un solo polo in -2, ci sono quindi 2 autovalori nascosti da determinare per valutare le proprietà di stabilità.

Il sistema è ottenuto dalla connessione in serie di $G_1(s)$ con il parallelo di $G_2(s)$ e $G_3(s)$ retroazionato con retroazione negativa unitaria. Quest'ultimo sistema ha funzione di trasferimento

$$G_a(s) = \frac{\frac{3}{s+1}}{1+\frac{3}{s+1}} = \frac{s+4}{s+2}\frac{3}{s+4} = \frac{3}{s+4}$$

quindi nella interconnessione in serie con $G_1(s)$ si è generato un autovalore nascosto pari a -4. La funzione di trasferimento del parallelo di $G_2(s)$ e $G_3(s)$:

$$G_b(s) = G_2(s) + G_3(s) = \frac{3}{s+1}$$

ha un solo polo, mentre il sistema parallelo ha ordine 2 (e autovalori coincidenti e pari a -1). L'autovalore nascosto mancante è quindi pari a -1.

Dato che tutti gli autovalori del sistema con ingresso u ed uscita y sono tutti reali negativi, per il criterio degli autovalori il sistema è asintoticamente stabile.

2.3 Determinare la risposta forzata $y(t)$, $t \geq 0$, del sistema con funzione di trasferimento $H(s) = \frac{3}{s+2}$ quando $u(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$. Verificare la correttezza dell'espressione ottenuta, confrontando valore iniziale e finale di $y(t)$ con quelli determinati mediante i teoremi del valore iniziale e finale.

La trasformata di Laplace dell'uscita forzata all'ingresso $u(t) = e^{-t}$ è:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)(s+1)}.$$

Sviluppando in fratti semplici $Y(s)$, si ottiene

$$Y(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{3}{s+1},$$

da cui antitrasformando i singoli addendi, per la linearità della trasformata di Laplace, si ottiene

$$y(t) = -3e^{-2t} + 3e^{-t},\ t \geq 0.$$

Il teorema del valore iniziale è applicabile ($Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria)

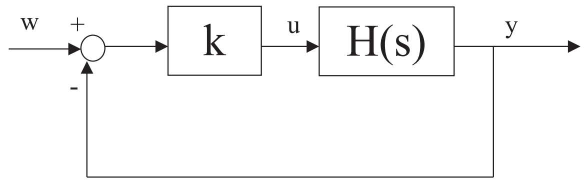
$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s}{(s+1)(s+2)} = 0.$$

Il teorema del valore finale è applicabile ($Y(s)$ è razionale fratta strettamente propria con radici del denominatore a parte reale negativa)

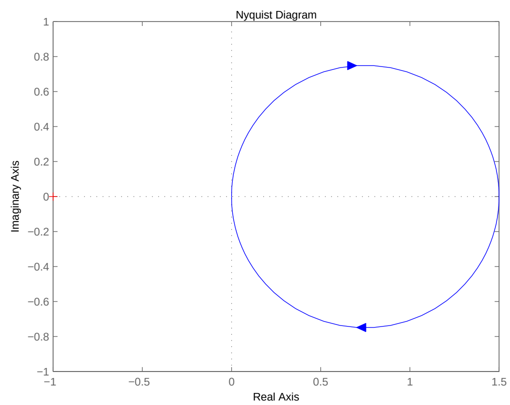
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s}{(s+1)(s+2)} = 0.$$

Il valore iniziale e finale di $y(t) = -3e^{-2t} + 3e^{-t}$, $t \geq 0$, sono: $y(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ e concordano con quelli calcolati sopra.

2.4 Il sistema asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $H(s) = \frac{3}{s+2}$ viene retroazionato come in figura, dove k è un parametro reale positivo. Dire, motivando la risposta, se esiste un valore di $k > 1$ tale per cui il sistema retroazionato è instabile.



Il diagramma di Nyquist di $G(s)$ è

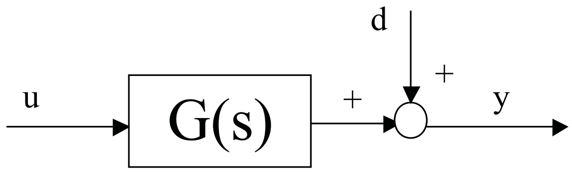


Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento d'anello $L(s) = kG(s)$ con $k > 1$ si ottiene dilatando il diagramma di Nyquist di $G(s)$ di un fattore $k > 1$ e quindi non potrà compiere nessun giro attorno al punto $(-1, 0)$ del piano complesso. Per il criterio di Nyquist il sistema retroazionato è quindi asintoticamente stabile $\forall k > 1$.

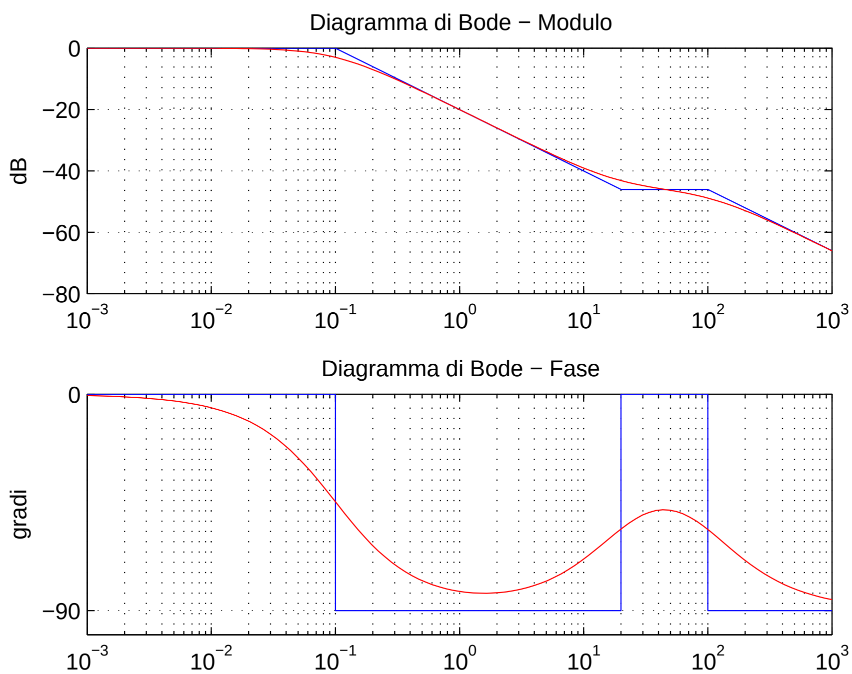
3. Si consideri il sistema in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{2} \, \frac{s+20}{(s+0.1)(s+100)}$$

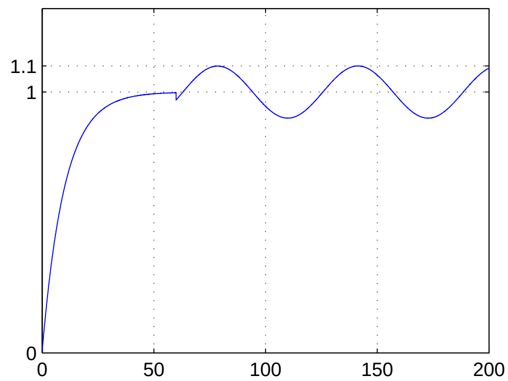
è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile.



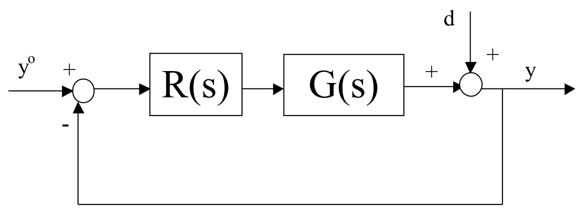
3.1 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici ed esatti della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



3.2 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0.1sen(0.1t)sca(t-60)$, $t \geq 0$.



3.3 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.



Progettare $R(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) se $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, allora $y(t)$ tende a 1 in 5 unità di tempo senza oscillazioni ripetute;

ii) il regolatore ha ordine minimo, compatibilmente con il requisito precedente.

Dal requisito i) segue che:

1. l'errore a transitorio esaurito quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$ deve essere nullo. Questo requisito di tipo statico comporta la necessità di introdurre un integratore in $R(s)$.

2. la modalità di risposta "senza oscillazioni ripetute" si ottiene garantendo un margine di fase $\varphi_m > \pi/3$. In questo modo il sistema retroazionato si può approssimare ad un filtro passa basso del I ordine con polo reale in $-\omega_c$. Dato che si richiede un tempo di assestamento di circa 5 unità di tempo allora $5/\omega_c \simeq 5$ da cui $\omega_c \simeq 1$.

Consideriamo come regolatore di tentativo $R(s) = \frac{1}{s}$.

Alla pulsazione $\omega = 1$, contribuiscono alla fase di $R(j\omega)G(j\omega)$ tutte le singolarità con modulo inferiore a $\omega = 1$ (le altre danno un contributo trascurabile essendo una decade oltre ω_c). Per quanto riguarda $G(s)$ contribuisce il polo in -0.1 con uno sfasamento di circa $-\pi/2$. Per quanto riguarda $R(s)$ il polo in 0 dà un contributo di $-\pi/2$.

Dato che si desidera $\varphi_m > \pi/3$, bisogna compensare il contributo del polo in -0.1 di $G(s)$, per esempio introducendo uno zero in -0.1:

$$R(s) = \frac{1 + s/0.1}{s} = \frac{1 + 10s}{s}.$$

Se si tracciano i diagrammi di Bode di $R(j\omega)G(j\omega)$ si osserva che $\omega_c = 1$. Quindi

$$R(s) = \frac{1 + 10s}{s}$$

4. Rispondere ai seguenti quesiti:

4.1 Enunciare con precisione il teorema della risposta in frequenza.

Si veda il libro di testo.

4.2 Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) in un sistema lineare asintoticamente stabile, il movimento dello stato tende a zero per ogni condizione iniziale e per ogni ingresso.

Falso. Quello che tende a zero è il movimento libero. Controesempi: se applico un ingresso sinusoidale ottengo a regime una risposta sinusoidale, se applico un ingresso costante ottengo a regime una costante, in generale non nulla.

b) se la funzione di trasferimento di un sistema lineare ha un polo in 3, allora si può concludere che il sistema è instabile.

Vero: I poli sono anche autovalori. Basta un autovalore a parte reale positiva per concludere che il sistema è instabile.