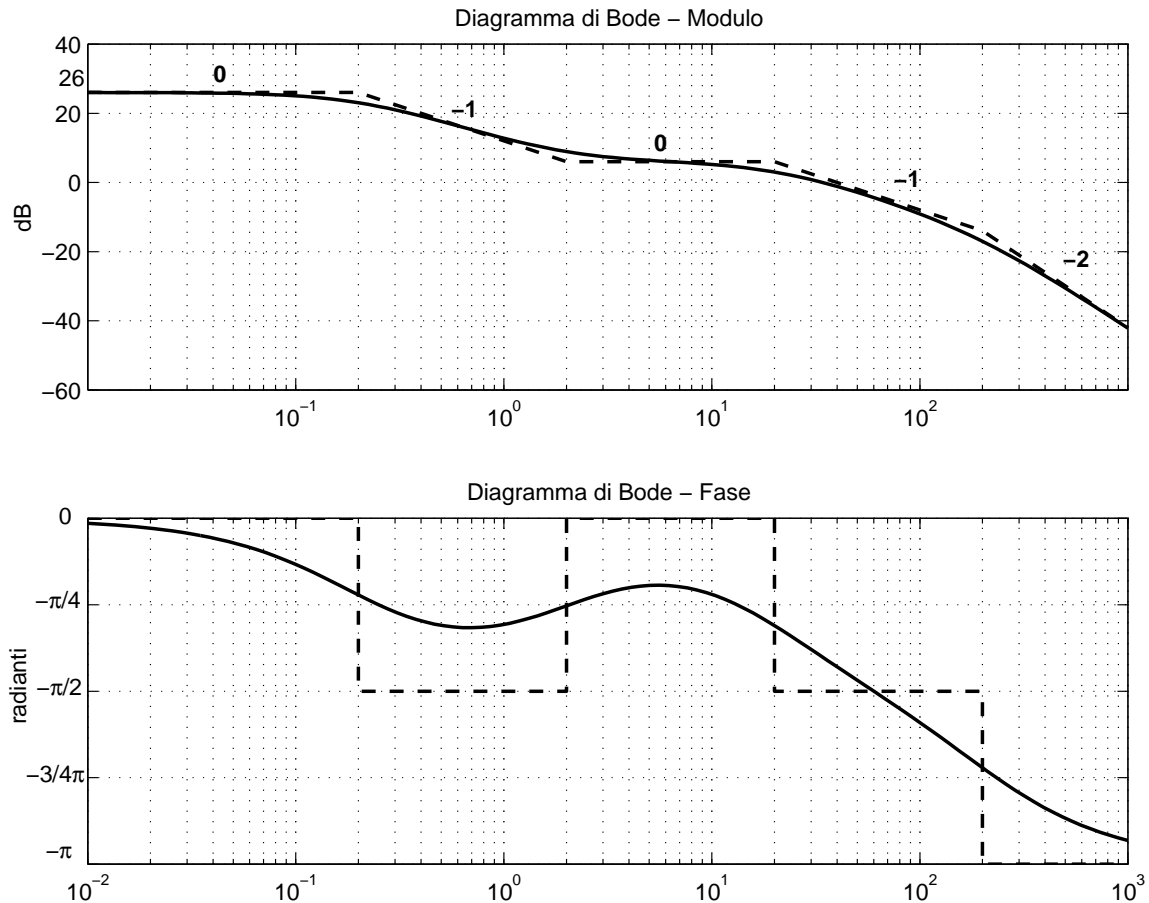


TESTO CON SOLUZIONE
 II PROVA IN ITINERE DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA - 9/2/2006
 PROF. MARIA PRANDINI

1. In figura sono riportati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante completamente raggiungibile ed osservabile con ingresso u ed uscita y .



1.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) il sistema è di ordine 4.
 Falso. Il sistema è di ordine 3 perchè è completamente raggiungibile e osservabile ed ha 3 poli.
- b) il sistema è asintoticamente stabile.
 Vero. I poli sono tutti a parte reale negativa e, dato che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile, i poli sono tutti e soli gli autovalori del sistema.
- c) la risposta forzata del sistema ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria si assesta ad un valore pari circa a 1.
 Falso. Si assesta al valore del guadagno, cioè a circa 20.
- d) la risposta forzata del sistema ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria si assesta in circa

25 unità di tempo al valore di regime.

Vero. Il polo dominante del sistema è -0.2 , quindi la costante di tempo dominante è 5.

e) la risposta forzata del sistema ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria non presenta oscillazioni ripetute.

Vero. Il sistema non presenta poli complessi coniugati.

f) segnali sinusoidali in ingresso al sistema con pulsazione $\omega > 800$ vengono attenuati di un fattore pari ad almeno 100.

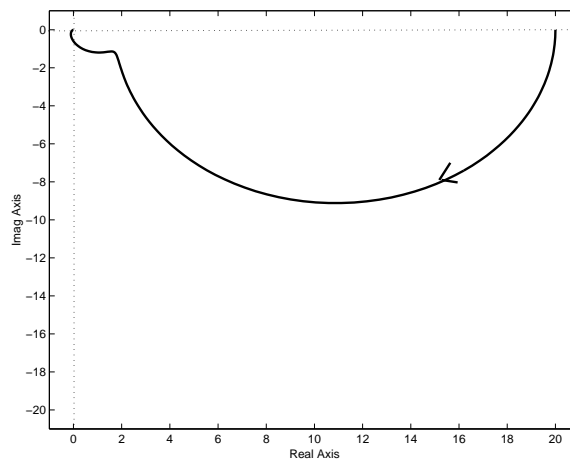
Vero. Il modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ è minore o uguale a $1/100$ per $\omega > 800$.

g) la presenza di un ritardo nel sistema pari ad un'unità di tempo ne modifica le proprietà di stabilità.

Falso. La presenza di un ritardo produce come unico effetto sul movimento dello stato e dell'uscita del sistema una traslazione nel tempo e quindi non ne altera le proprietà di stabilità.

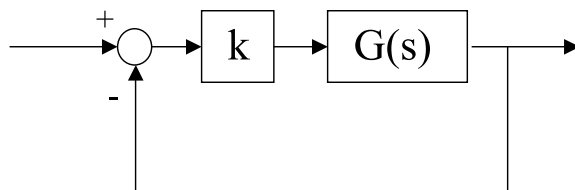
Nota: il sistema è in anello aperto!!! non ha quindi alcun senso applicare il criterio di Bode e, più in generale, i metodi di analisi per sistemi retroazionati con retroazione negativa unitaria.

1.2 Si tracci in modo qualitativo il diagramma polare di $G(s)$.



Il diagramma polare rimane confinato nel semipiano immaginario negativo (la fase di $G(j\omega)$ è compresa tra $-\pi$ e 0). Inoltre per $\omega \rightarrow +\infty$ tende all'origine del piano complesso con tangente orizzontale.

1.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato come in figura, dove k è un parametro reale positivo.



Dire, motivando la risposta, per quali valori del parametro $k > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento ad anello aperto $L(s) = kG(s)$ ha diagramma polare che si può ottenere da quello di $G(s)$ per amplificazione ($k > 1$) o per contrazione ($0 < k \leq 1$). In ogni caso esso rimane confinato nel semipiano immaginario negativo e non attraversa il semiasse reale negativo. Questo significa che il numero di giri del diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno al punto $(-1, 0)$ del piano complesso è ben definito e pari a 0 per ogni $k > 0$. Dato che il numero dei poli a parte reale positiva di $L(s)$ è 0, dal criterio di Nyquist segue l'asintotica stabilità del sistema retroazionato in figura per ogni valore di $k > 0$. Detto in altri termini, il margine di guadagno di $G(s)$ è infinito.

Nota: L'esercizio non può essere risolto utilizzando il solo criterio di Bode. Il criterio di Bode è infatti applicabile solo per $k > 1/20$. Quando $0 < k \leq 1/20$, la pulsazione critica non è infatti più ben definita, ed è quindi necessario ricorrere al criterio di Nyquist.

1.4 Si consideri il sistema retroazionato descritto al punto precedente. Posto $k = 1$, dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- il sistema retroazionato è di ordine 4.
Falso. Il sistema è di ordine 3 perchè è ottenuto per composizione di un sistema di ordine 3 con uno statico.
- il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
Vero. Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per ogni valore di $k > 0$ (si veda la risposta al punto 1.3).
Alternativamente si può osservare che il sistema ad anello aperto con funzione di trasferimento $L(s) = kG(s) = G(s)$ soddisfa ai requisiti per l'applicabilità del criterio di Bode (senza parti nascoste non asintoticamente stabili, con pulsazione critica ω_c ben definita, e senza poli con parte reale > 0). Dato che margine di fase e guadagno di $L(s)$ sono entrambi positivi, dal criterio di Bode segue l'asintotica stabilità.
- la risposta forzata del sistema retroazionato ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria si assesta ad un valore pari circa a 1.
Vero. Si assesta al valore $\mu_L / (1 + \mu_L)$ dove μ_L è il guadagno della funzione di trasferimento ad anello aperto $L(s) = kG(s) = G(s)$ e quindi $\mu_L / (1 + \mu_L) = 20/21 \simeq 1$.
- la risposta forzata del sistema retroazionato ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria si assesta in circa 25 unità di tempo al valore di regime.

Falso. Dato che il margine di fase è $> 0.4\pi$, il sistema retroazionato è approssimabile con un sistema del I ordine con polo in $-\omega_c = -30$. Il tempo di assestamento è quindi $5/\omega_c = 1/6$.

- e) la risposta forzata del sistema retroazionato ad un ingresso a scalino di ampiezza unitaria non presenta oscillazioni ripetute.

Vero. Dato che il margine di fase è $> 0.4\pi$, il sistema retroazionato è approssimabile con un sistema del I ordine con polo in $-\omega_c$.

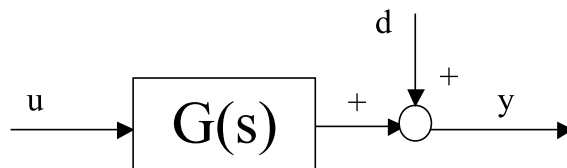
- f) segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato con pulsazione $\omega > 800$ vengono attenuati di un fattore pari ad almeno 100.

Vero. La funzione di trasferimento ad anello chiuso $F(s) = G(s)/(1 + G(s))$ ha modulo della risposta in frequenza $|F(j\omega) \simeq |G(j\omega)|$ per $\omega > \omega_c$, e $|G(j\omega)| \leq 1/100$ per $\omega \geq 800$.

- g) la presenza di un ritardo nel sistema ad anello aperto pari ad un'unità di tempo modifica le proprietà di stabilità del sistema retroazionato.

Vero. Il criterio di Bode è ancora applicabile perchè la presenza di un ritardo $T = 1$ nel sistema ad anello aperto non altera il modulo della risposta in frequenza del sistema ad anello aperto e quindi la pulsazione critica ω_c è ben definita e pari a -30 . Risulta però alterato il margine di fase perchè viene introdotto uno sfasamento alla pulsazione critica pari $-\omega_c T = -30 < -9\pi$. La fase critica diventa quindi $\phi_c = \arg G(j\omega_c) - \omega_c T < -\pi$ e di conseguenza il margine di fase è negativo e pari a $\phi_m = \pi - |\phi_c| < 0$. Il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

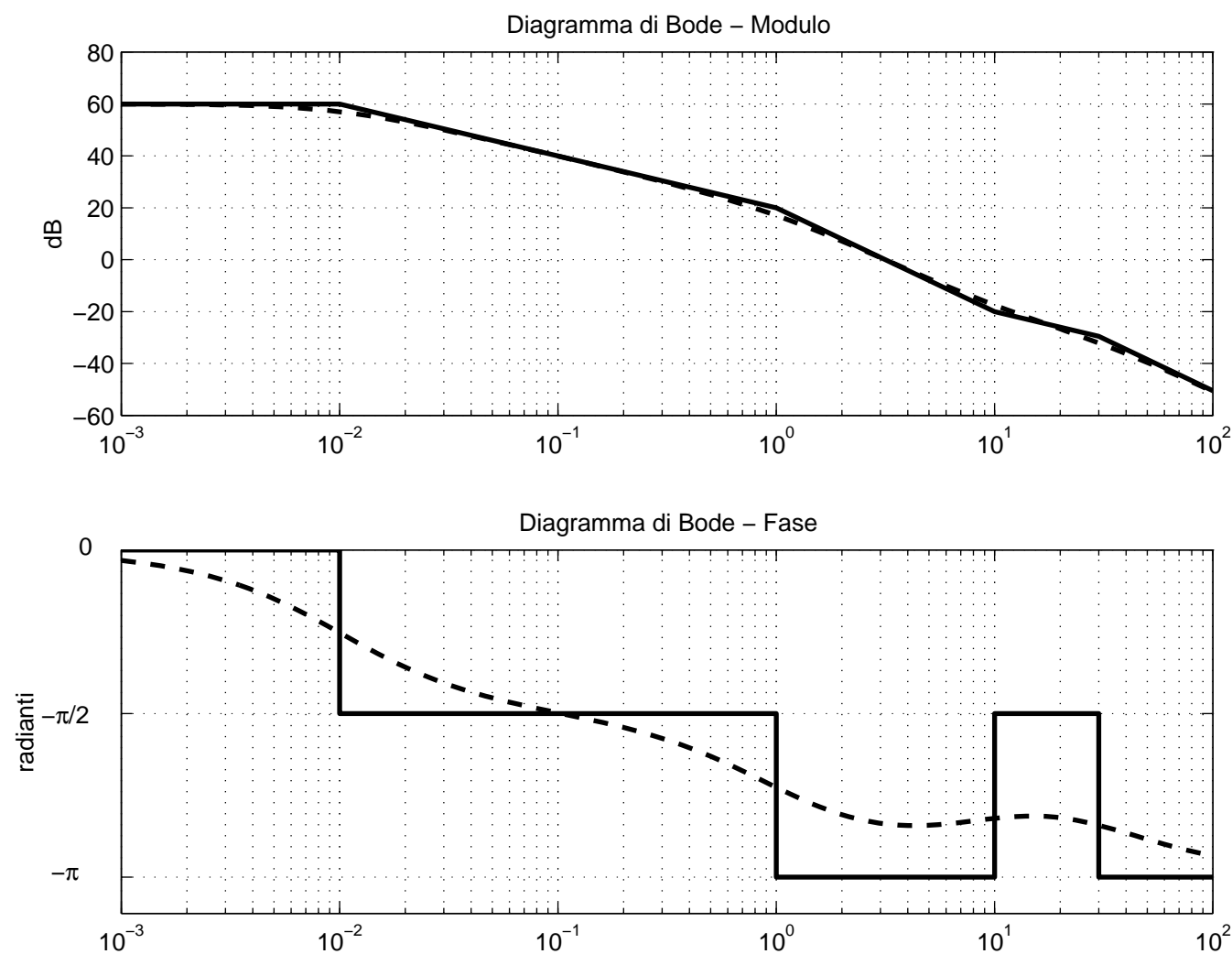
2. Si consideri il sistema asintoticamente stabile con ingresso u ed uscita y rappresentato in figura.



Il segnale d rappresenta un disturbo additivo sull'uscita e

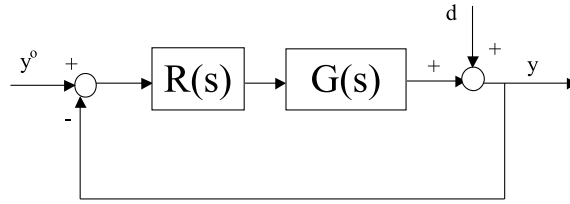
$$G(s) = \frac{30(s + 10)}{(s + 30)(s + 1)(s + 0.01)}$$

2.1 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase asintotici e reali della risposta in frequenza associata a $G(s)$.



2.2 Determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ di un regolatore PID da inserire nello schema in figura in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- i) se $y^o(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $y(t)$ tende asintoticamente ad 1 in circa 5 unità di tempo e senza oscillazioni;
- ii) un disturbo d a scalino viene attenuato sull'uscita y di un fattore pari ad almeno 10.



Scrivere $R(s)$ nella forma standard: $R(s) = k\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{T_D s}{1 + sT_D/N}\right)$.

Per soddisfare il requisito statico di errore di inseguimento di un riferimento a scalino nullo del punto i) è necessario introdurre un integratore in $R(s)$. Questo basta per soddisfare il requisito ii) di attenuazione di un disturbo a scalino.

Per soddisfare i requisiti dinamici (tempo e modalità di risposta) del punto i), basta avere un margine di fase $> 0.4\pi$ (per evitare oscillazioni) e una pulsazione critica pari ad 1 (quando il margine di fase è maggiore di 0.4π , il sistema di controllo con ingresso y^o ed uscita y è approssimabile ad un sistema del I ordine con polo in $-\omega_c$, ed ha quindi tempo di assestamento pari a $5/\omega_c$). Per avere un margine di fase $> 0.4\pi$ devo compensare con i 2 zeri del PID il contributo alla fase dei 2 poli che intervengono prima della pulsazione ω_c desiderata. Con il guadagno generalizzato del regolatore faccio poi in modo che la pulsazione critica sia effettivamente quella desiderata. Aggiungo poi un polo una decade dopo ω_c per rendere il regolatore realizzabile.

Un regolatore che soddisfa a queste condizioni è:

$$R(s) = \frac{1}{1000} \frac{(1+s)(1+s/0.01)}{s(1+s/10)} = \frac{1}{1000} \frac{(1+101s+100s^2)}{s(1+0.1s)}$$

Confrontando questa espressione con quella di un generico PID:

$$\begin{aligned} R(s) &= k\left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{T_D s}{1 + sT_D/N}\right) \\ &= \frac{k}{T_I} \frac{1 + s(T_I + T_D/N) + s^2(T_I T_D + T_I T_D/N)}{s(1 + sT_D/N)} \end{aligned}$$

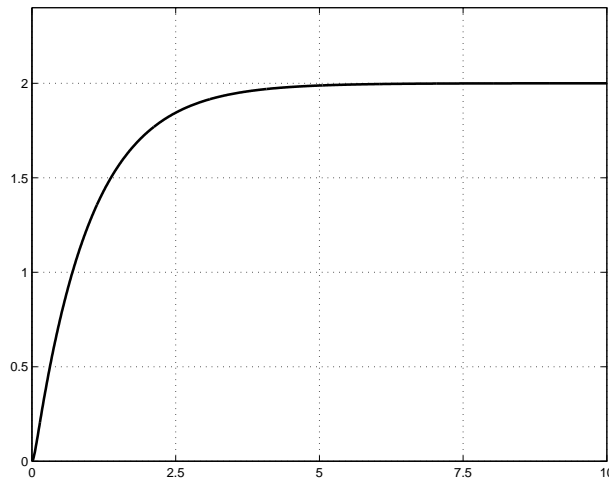
si ottiene

$$\begin{aligned} T_D/N &= 0.1 \\ T_I + T_D/N &= 101 \\ T_I(T_D + T_D/N) &= 100 \\ k/T_I &= 1/1000 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} T_I &= 101 - T_D/N = 101 - 0.1 \simeq 101 \\ k &= T_I/1000 \simeq 0.101 \\ T_D &= 100/T_I - T_D/N \simeq 0.9 \\ N &= T_D/0.1 = 9 \end{aligned}$$

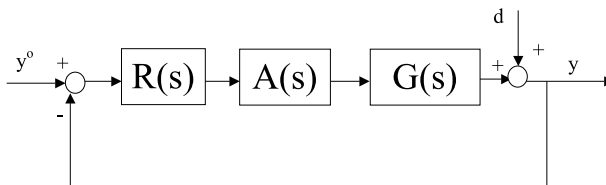
2.3 Con riferimento al sistema di controllo progettato, tracciare l'andamento forzato dell'uscita y quando $y^o(t) = 2sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$.



2.4 Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto, abbia funzione di trasferimento

$$A(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}.$$

Dire, motivando la risposta, se le prestazioni del sistema di controllo che include il regolatore progettato al punto 2.2 e l'attuatore



sono differenti rispetto a quelle richieste al punto 2.2.

Valutiamo se il sistema retroazionato rimane asintoticamente stabile.

In questo caso la funzione di trasferimento ad anello aperto è $L(s) = R(s)A(s)G(s)$. $A(s)$ ha guadagno pari ad 1 ed un solo polo reale negativo. L'effetto di $A(s)$ è quindi quello di modificare in modo significativo modulo e fase della risposta in frequenza di $L(s)$ solo dalla pulsazione $\omega = 10$, cioè da una decade dopo la pulsazione critica desiderata. La pulsazione critica ed il margine di fase rimangono pressochè inalterati. Il criterio di Bode rimane applicabile e ci permette di concludere che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Valutiamo se rimangono inalterate le prestazioni statiche e dinamiche richieste ai punti i) e ii).

La funzione di trasferimento tra y^o ed y è data dalla funzione di sensitività complementare $L(s)/(1+L(s))$, e quella tra il disturbo d ed y dalla funzione di sensitività $L(s)$.

Il tipo di $L(s)$ è 1, quindi i requisiti statici ai punti i) e ii) sono soddisfatti. I requisiti dinamici al punto i) rimangono soddisfatti perchè la pulsazione critica ed il margine di fase non cambiano in modo significativo.

3. Rispondere in modo conciso e chiaro ai seguenti quesiti.

3.1 Enunciare con precisione il criterio di Bode.

Si veda il libro di testo.

3.2 Con riferimento all'esercitazione sperimentale svolta in laboratorio, descrivere brevemente il problema di controllo affrontato, specificando variabili di controllo e controllate, e disturbi.

Si vedano i lucidi del laboratorio relativi all'esercitazione sperimentale.