Testo con soluzione
I prova in itinere di Fondamenti di Automatica - 22/11/2005
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1^3(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned} \tag{1}$$

1.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema è lineare o non lineare, statico o dinamico, tempo variante o tempo invariante, strettamente proprio o proprio.

Sistema non lineare (nella prima equazione di stato compare un termine non lineare in x_1), dinamico (l'uscita $y(t)$ non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso u allo stesso istante t), tempo invariante (i coefficienti che compaiono nelle equazioni di stato e nella trasformazione di uscita non dipendono dal tempo), e strettamente proprio (l'ingresso u non compare nella trasformazione di uscita).

1.2 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita y del sistema descritto dalle equazioni (1) quando l'ingresso applicato è $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$.

Dato che $y = x_2$, basta determinare il movimento della sola variabile di stato x_2 associato a $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$. $x_2(0) = 0$. Esso si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

quando $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_2(0) = 0$. La soluzione è

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}, \; t \geq 0.$$

Quindi

$$y(t) = 1 - e^{-t}, \; t \geq 0.$$

1.3 Determinare il valore $\bar{u}$ tale che l'uscita di equilibrio associata all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, $\forall t$, sia $\bar{y} = 1$. Calcolare lo stato di equilibrio $\bar{x} = [\bar{x}_1 \, \bar{x}_2]^T$ corrispondente.

Ponendo a zero le derivate $\dot{x}_1$ e $\dot{x}_2$ con $u(t) = \bar{u}, \forall t$ si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2\bar{x}_1^3 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ -\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \bar{x}_1^3 = -\bar{x}_2 \\ \bar{u} = \bar{x}_2 \end{cases}$$

L'uscita di equilibrio soddisfa

$$\bar{y} = \bar{x}_2,$$

per cui si ha $\bar{x}_2 = 1$ e quindi dal sistema di equazioni scritto sopra segue

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{u} = 1 \end{cases}$$

1.4 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al movimento di equilibrio determinato al punto precedente.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1(t) &= 6\Delta x_1(t) + 2\Delta x_2(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) &= -\Delta x_2(t) + \Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= \Delta x_2(t) \end{aligned}$$

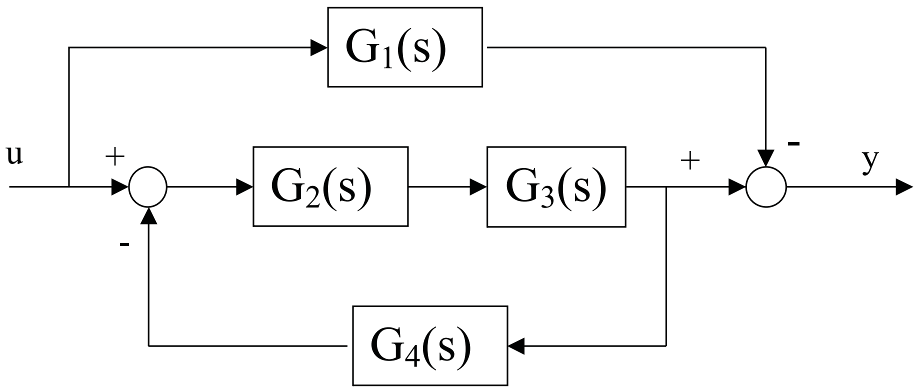
1.5 Valutare se l'analisi di stabilità per il sistema linearizzato consente di trarre conclusioni circa la stabilità del movimento di equilibrio.

La matrice dinamica A del sistema linearizzato è:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Essa ha autovalori $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. Dal criterio degli autovalori segue che il sistema linearizzato è instabile. La presenza di un autovalore a parte reale positiva nella matrice A è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio è instabile.

2. Si consideri lo schema in figura, dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi lineari tempo invarianti di ordine 1.



2.1 Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in termini di $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$.

$$H(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} - G_1(s)$$

2.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+10}$, $G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}$, $G_3(s) = \frac{1}{s-1}$ e $G_4(s) = -\frac{8}{s+9}$ nell'espressione calcolata al punto precedente:
(a) verificare che $H(s) = \dfrac{8}{s^2 + 11s + 10}$;
(b) valutare le proprietà di stabilità del sistema con ingresso u ed uscita y.

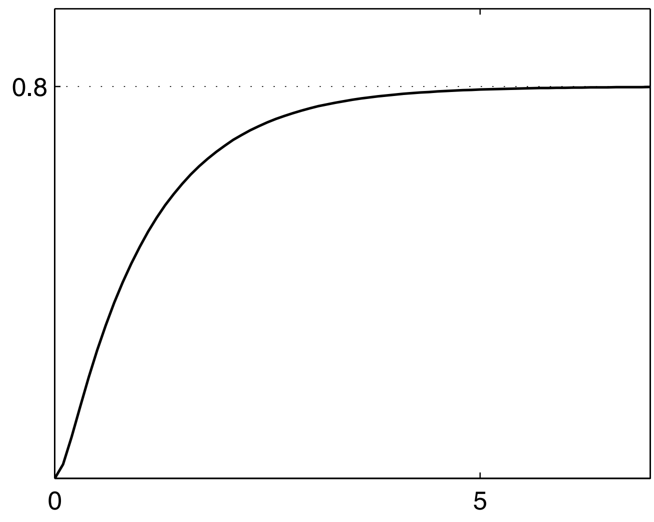
$$\begin{aligned}
G_2(s)G_3(s) &= \frac{1}{s+2} \\
F(s) &= \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)G_4(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 - \frac{8}{(s+9)(s+2)}} = \frac{s+9}{s^2 + 11s + 10} = \frac{s+9}{(s+1)(s+10)} \\
H(s) &= \frac{s+9}{(s+1)(s+10)} - \frac{1}{s+10} = \frac{8}{s^2 + 11s + 10}
\end{aligned}$$

Il sistema ha ordine 4. La funzione di trasferimento trovata ha 2 poli in -1 e -10. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -10$, e gli autovalori della parte non raggiungibile e/o non osservabile generati nella serie tra il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ e quello con funzione di trasferimento $G_3(s)$ e cioè $\lambda_3 = 1$, e nel parallelo tra il sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ e quello con funzione di trasferimento $-G_1(s)$ e cioè $\lambda_4 = -10$. La presenza di un autovalore reale positivo, ci permette di concludere che il sistema è instabile.

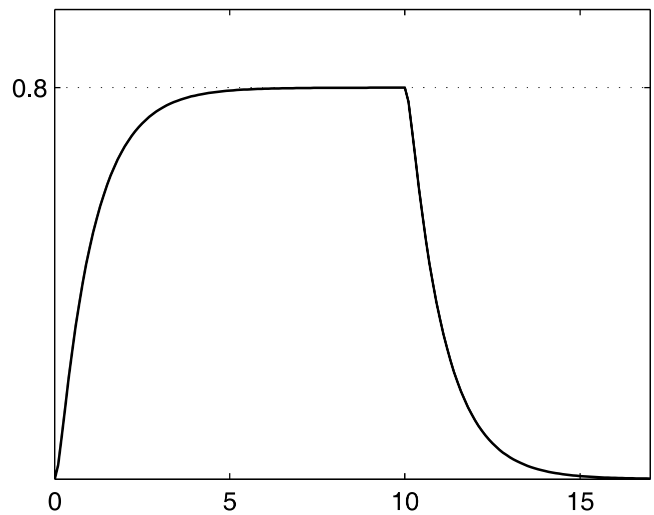
2.3 Determinare tipo, guadagno generalizzato, poli e zeri della funzione di trasferimento $H(s) = \frac{8}{s^2+11s+10}$.

Tipo $g = 0$, guadagno $\mu = 0.8$, nessuno zero, due poli in $p_1 = -1$ e $p_2 = -10$.

2.4 Tracciare l'andamento della risposta forzata del sistema con funzione di trasferimento $H(s) = \frac{8}{s^2+11s+10}$ all'ingresso a scalino $u(t) = sca(t)$ (indicare nel grafico: valore iniziale, valore asintotico, e tempo di assestamento).



2.5 Tracciare l'andamento della risposta forzata del sistema con funzione di trasferimento $H(s) = \frac{8}{s^2+11s+10}$ all'ingresso $u(t) = sca(t) - sca(t-10)$.



3. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) in un sistema lineare instabile, il movimento libero dello stato diverge per ogni condizione iniziale.

Falso. Per esempio

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned}$$

è instabile, e il movimento libero associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \alpha$, tende a zero per ogni $\alpha \in \Re$. In un sistema lineare instabile, esiste almeno una condizione iniziale per cui il movimento libero dello stato diverge.

b) il sistema lineare ottenuto per interconnessione di due sistemi lineari è asintoticamente stabile se e solo se lo sono i due sistemi componenti.

Falso. Se i due sistemi lineari sono interconnessi mediante retroazione, allora la condizione non è nè necessaria (un sistema ottenuto per connessione in retroazione di due sistemi instabili può essere asintoticamente stabile) nè sufficiente (un sistema ottenuto per connessione in retroazione di due sistemi asintoticamente stabili può essere instabile).

c) un sistema con equazione di stato $\dot{x} = f(x, u)$ che ammette esattamente due stati di equilibrio corrispondenti ad uno stesso ingresso costante è necessariamente non lineare.

Vero. Un sistema lineare con matrice dinamica A non singolare ammette un solo stato di equilibrio associato ad un ingresso costante. Se la matrice A è singolare allora si possono avere infiniti stati di equilibrio oppure nessuno stato di equilibrio.

d) si consideri un sistema lineare tempo invariante asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $G(s)$ senza zeri e con soli poli reali. Allora, l'uscita di regime associata ad un ingresso sinuosoidale con ampiezza unitaria è sinuosoidale con ampiezza inferiore al guadagno di $G(s)$.

Vero. La funzione di trasferimento $G(s)$ è della forma

$$G(s) = \frac{\mu}{\Pi_{i=1}^{n}(1 + s\tau_i)}$$

con τ_i reale per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per il teorema della risposta in frequenza a regime la risposta ad un ingresso sinuosoidale con pulsazione ω è una sinusoide con pulsazione ω, la cui ampiezza è uguale a quella della sinusoide in ingresso moltiplicata per

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{\Pi_{i=1}^{n}|1 + j\omega\tau_i|} = \frac{|\mu|}{\Pi_{i=1}^{n}\sqrt{1 + \omega^2\tau_i^2}} < |\mu|$$