Testo con soluzione
II appello di Fondamenti di Automatica - 3/7/2007
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 3x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = x_3(t) + u(t)$$
$$y(t) = 2x_1(t)$$

1.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$, e $x_3(0) = 1$, e all'ingresso $u(t) = 2$, $t \geq 0$.

L'uscita dipende unicamente dalla prima variabile di stato $x_1(t)$, che evolve indipendetemente dalle altre variabili di stato. Calcoliamo quindi il movimento della prima variabile di stato associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 2$ e all'ingresso $u(t) = 2$, $t \geq 0$:

$$x_1(t) = e^{-2t}x_1(0)+\int_0^t e^{-2(t-\tau)}u(\tau)d\tau = 2e^{-2t}+\int_0^t 2e^{-2(t-\tau)}d\tau = 2e^{-2t}+e^{-2t}[e^{-2t}-1] = 1+e^{-2t},\ t \geq 0$$

Da cui segue:

$$y(t) = 2x_1(t) = 2 + 2e^{-2t},\ t \geq 0$$

1.2 Dire, motivando la risposta, se esistono valori $x_0 \in \Re^3$ non nulli ($x_0 \neq [0\,0\,0]^T$) tali per cui il <u>movimento libero dell'uscita</u> associato a $x(0) = x_0$ è identicamente nullo: $y_l(t) = 0$, $t \geq 0$.

Il movimento libero dell'uscita è dato da

$$y_l(t) = 2x_{1l}(t) = 2e^{-t}x_1(0), t \geq 0$$

che è identicamente nullo se e solo se $x_1(0) = 0$. Pertanto, esiste un'infinità di condizioni iniziali $x(0) = x_0 \in \Re^3$ non nulle tali per cui $y_l(t) = 0$, $t \geq 0$. Esse sono tutte e sole le condizioni iniziali della forma:

$$x_0 = [0\ \alpha\ \beta]^T, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Re.$$

2. Si consideri il sistema non lineare di ordine 1 con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = x(t)$$

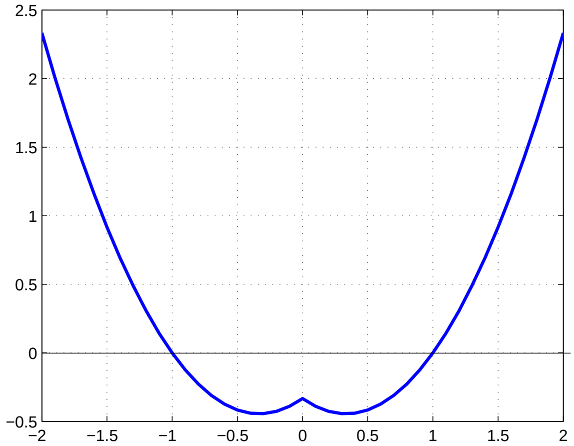
In figura è riportato l'andamento di $f(x, 3)$ in funzione della variabile x.

2.1 Determinare gli stati e l'uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 3$, $t \geq 0$.

Il valore degli stati di equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro dell'equazione di stato calcolata ponendo $x(t) = \bar{x}$ e $u(t) = 3$, $\forall t$:

$$f(\bar{x}, 3) = 0,$$

per cui gli stati di equilibrio si leggono dal grafico sopra riportato e sono $\bar{x}_a = 1$ e $\bar{x}_b = -1$.



2.2 Valutare le proprietà di stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto 2.1.

Quando $u(t) = 3$, $\forall t$, la derivata di $x(t)$ è $\dot{x} = f(x, 3)$. Tramite il grafico di $f(x, 3)$ si può analizzare il segno della derivata in un intorno di ognuno degli stati di equilibrio suddetti e dedurre che: $\bar{x}_a = 1$ è instabile, mentre $\bar{x}_b = -1$ è asintoticamente stabile.

2.3 Dire, motivando la riposta se e come cambiano le risposte ai due quesiti precedenti nel caso di sistema non lineare descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Gli stati di equilibrio non cambiano perchè sono ottenuti uguagliando a zero il secondo membro dell'equazione di stato calcolata ponendo $x(t) = \bar{x}$ e $u(t) = 3$, $\forall t$:

$$2f(\bar{x}, 3) = 0,$$

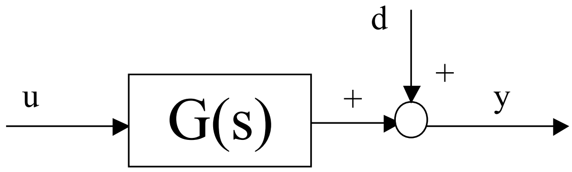
e quindi sono ancora gli annullanti di $f(\bar{x}, 3)$: $\bar{x}_a = -1$, $\bar{x}_b = 0$ e $\bar{x}_c = 30$.

Per quanto riguarda le proprietà di stabilità, la derivata di $x(t)$ per $u(t) = 2$, $\forall t$, è $\dot{x} = 2f(x, 3)$ e quindi ha lo stesso segno di $f(x, 3)$, da cui si deduce che le proprietà di stabilità degli stati di equilibrio rimangono inalterate.

3. Si consideri il sistema in figura dove

$$G(s) = 2\frac{s + 500}{(s + 100)(s^2 + 0.2s + 1)}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile e d è un disturbo additivo sull'uscita.



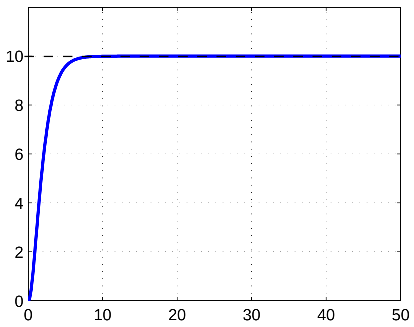
3.1 Determinare tipo, guadagno, poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$. Quale è la costante di tempo dominante del sistema?

Il tipo della funzione di trasferimento è 0, il guadagno è pari a $G(0) = 10$, lo zero è in $z = -500$, i poli sono $p_1 = -100$, $p_2 = -0.1 + i\sqrt{0.99}$ e $p_3 = -0.1 - i\sqrt{0.99}$.

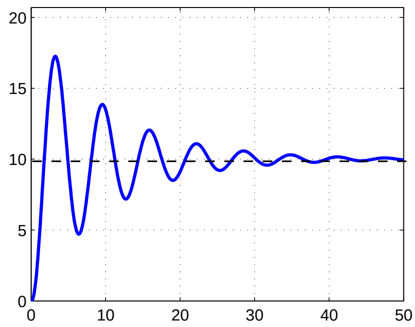
Il polo dominante è quello più vicino all'asse immaginario; in questo caso, dato che i due poli complessi coniugati hanno ovviamente la medesima parte reale, ci sono due poli dominanti: $p_{d1} = p_2$, $p_{d2} = p_3$. La costante di tempo dominante è pertanto pari a

$$\tau_d = \frac{1}{|Re(p_{d1})|} = \frac{1}{|Re(p_{d2})|} = 10.$$

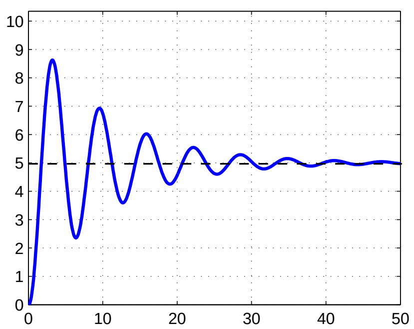
3.2 Dire, motivando la risposta, quale dei grafici sotto riportati rappresenta la risposta forzata del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$.



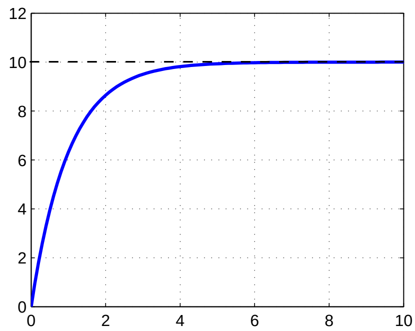
(a)



(b)



(c)



(d)

Dal calcolo della costante di tempo dominante $\tau_d = 10$ notiamo che il tempo di assestamento della risposta sarà pari a $T_a \approx 5\tau_d = 50$ unità di tempo, pertanto possiamo escludere i grafici (a) e (d).

I grafici (b) e (c) presentano entrambi oscillazioni smorzate, compatibili con la presenza dei poli dominanti complessi coniugati con parte reale negativa. Dato che il guadagno della $G(s)$ è pari a 10 e la funzione di trasferimento ha tutti i poli a parte reale negativa, sappiamo che - a regime - la risposta allo scalino unitario si assesta ad un valore costante e pari al guadagno $\mu = 10$, il che porta ad escludere il grafico (c).

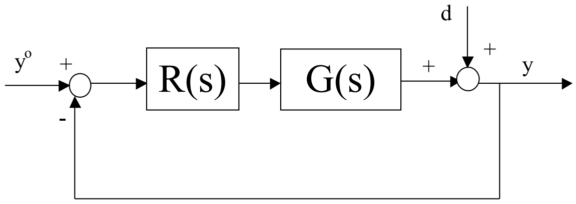
Il grafico corretto è dunque il grafico (b).

3.3 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.

Progettare $R(s)$ in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) se $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 2sca(t)$, $t \geq 0$, allora $y(t)$ tende a 1 in 0.5 unità di tempo senza oscillazioni ripetute;

ii) il regolatore ha ordine minimo, compatibilmente con il requisito precedente.



Per soddisfare il requisito statico al punto i) di errore di inseguimento nullo a fronte di uno scalino sul riferimento e sul disturbo in linea di andata è necessario utilizzare un integratore.

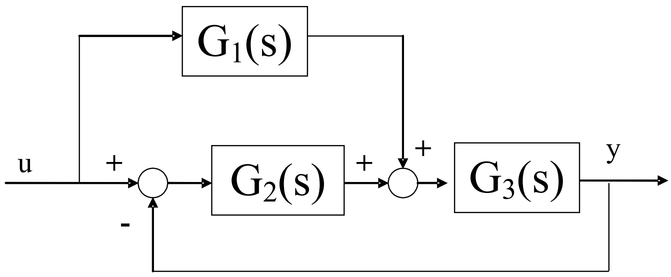
Per soddisfare il requisito dinamico al punto i) di risposta senza oscillazioni ripetute e tempo di assestamento di 0.5 basta imporre un margine di fase $\phi_m > \pi/3$ e una pulsazione critica $\omega_c \simeq 5/0.5 = 10$.

Dato che i poli $p_2 = -0.1 + i\sqrt{0.99}$ e $p_3 = -0.1 - i\sqrt{0.99}$ di $G(s)$ intervengono alla pulsazione $\omega = |p_2| = |p_3| = 1$, per ottenere $\phi_m > \pi/3$ introduciamo due zeri a cancellare questi poli, e infine un polo due decadi dopo la ω_c desiderata per la fisica realizzabilità di $R(s)$:

$$R(s) = \frac{s^2 + 0.2s + 1}{s(1 + s/1000)}.$$

Il guadagno generalizzato di $L(s) = R(s)G(s)$ è 10, e quindi $\omega_c = 10$, come desiderato.

4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1^o ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



4.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) se la funzione di trasferimento $G_1(s)$ presenta un polo uguale a 2, allora il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

VERO: Il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ non è retroazionato e quindi i suoi poli sono anche autovalori del sistema complessivo.

(b) se la funzione di trasferimento $G_2(s)$ presenta un polo uguale a 2, allora il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

FALSO: la funzione di trasferimento $G_2(s)$ è inserita in un anello di retroazione e gli autovalori di un sistema in cui compare una parte retroazionata non sono dati dall'insieme degli autovalori dei sistemi componenti, ma sono in generale diversi da essi. Può quindi essere che la funzione di trasferimento $G_2(s)$ abbia un polo reale positivo e che il sistema complessivo sia asintoticamente stabile.

4.2 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = G_1(s)\frac{G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} + \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

5. Rispondere in modo conciso e chiaro ai seguenti quesiti:

(a) descrivere la struttura di un regolatore realizzato in tecnologia digitale per il controllo in retroazione di un sistema lineare a tempo continuo.

Si veda il libro di testo.

(b) con riferimento all'esercitazione sperimentale svolta in laboratorio, descrivere brevemente il problema di controllo affrontato, specificando variabili di controllo e controllate, e disturbi.

Si vedano i lucidi delle esercitazioni di laboratorio.