Testo con soluzione
I appello di Fondamenti di Automatica - 9/3/2007
Prof. Maria Prandini

1. Si consideri il sistema dinamico non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1^3 - x_1 + 3x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2^2 + x_1 \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1.1 Verificare che $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$ è movimento di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = -1$, $t \geq 0$, e scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad esso.

Le equazioni di stato del sistema non lineare assegnato sono soddisfatte da $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$, e $u(t) = -1$, $t \geq 0$, in quanto:

$$
\begin{cases}
0 = -1^3 - 1 + 3 - 1 \\
0 = -1^2 + 1
\end{cases}
$$

Allora $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$ è movimento di equilibrio associato all'ingresso costante $u(t) = -1$, $t \geq 0$.

Le equazioni del sistema linearizzato attorno a questo movimento di equilibrio sono:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Delta x}_1 &= -4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 + \Delta u \\
\dot{\Delta x}_2 &= \Delta x_1 - 2\Delta x_2 \\
\Delta y &= \Delta x_1
\end{aligned}
$$

1.2 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio specificato al punto precedente.

La matrice dinamica del sistema linearizzato è

$$
A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
$$

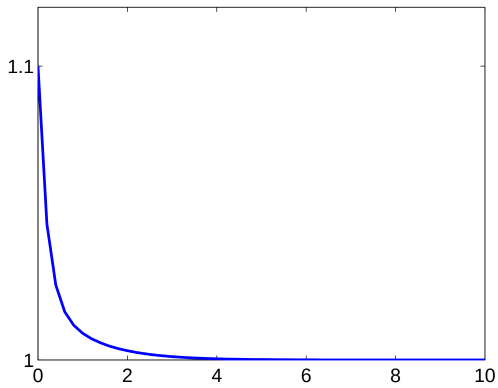
Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$
det(\lambda I - A) = (\lambda + 4)(\lambda + 2) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 5)(\lambda + 1)
$$

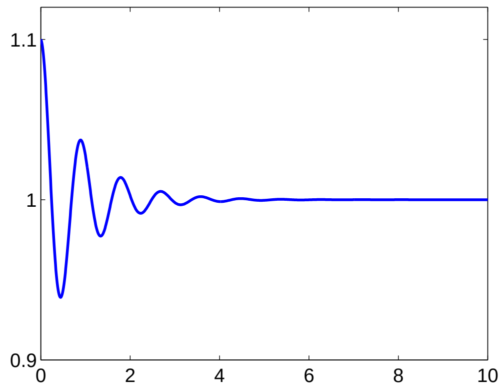
e cioè $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -1$.

Gli autovalori di A sono reali negativi. Questa è condizione sufficiente per concludere che il movimento di equilibrio del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

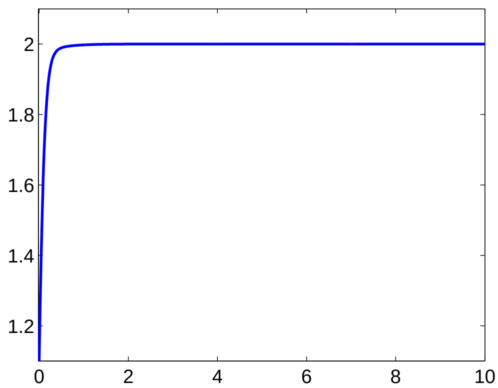
1.3 Dire, motivando la risposta, quale dei grafici (a), (b), e (c) sotto riportati rappresenta il movimento dell'uscita y del sistema non lineare (1) associato all'ingresso $u(t) = -1$, $t \geq 0$, e alla condizione iniziale $x_1(0) = 1.1$ e $x_2(0) = 1$.



(a)



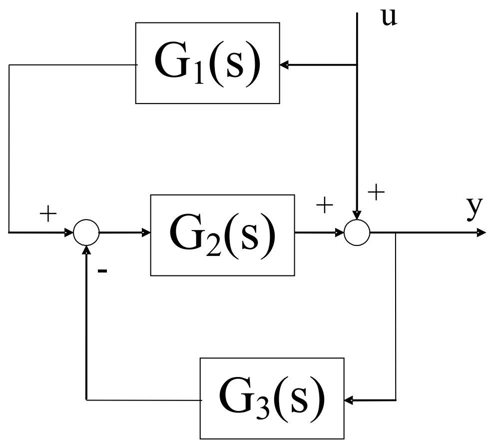
(b)



(c)

Oseerviamo che il movimento in questione è ottenuto per perturbazione della condizione iniziale del movimento di equilibrio descritto precedentemente. Dato che tale movimento di equilibrio è asintoticamente stabile, ed il sistema linearizzato attorno ad esso ha autovalori reali, il grafico corretto è il grafico (a). In esso $y = x_1$ tende al valore di equilibrio 1 senza oscillazioni.

2. Si consideri lo schema in figura, dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi lineari tempo invarianti di ordine 1.



2.1 Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in termini di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = G_1(s)\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} + \frac{1}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

2.2 Valutare le proprietà di stabilità del sistema con ingresso u ed uscita y quando $G_1(s) = \frac{1}{s-2}$, $G_2(s) = \frac{10}{s+1}$ e $G_3(s) = \frac{1}{s+9}$.

Il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile perchè il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ non viene retroazionato e quindi il suo autovalore uguale a 2 rimane autovalore del sistema complessivo.

3. Si consideri il sistema lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -4x_1 - x_2 + u \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + u \\
\dot{x}_3 &= x_2 - 10x_3 \\
y &= 2x_3
\end{aligned}$$

Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita y del sistema quando l'ingresso applicato è $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$.

Dato che $y = 2x_3$, basta determinare il movimento della sola variabile di stato x_3 associato a $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$. Esso si ottiene risolvendo l'equazione che governa l'evoluzione di x_2 e poi, in cascata, quella che governa l'evoluzione di x_3.

Risolviamo l'equazione differenziale

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

quando $u(t) = 1$, $t \geq 0$, e $x_2(0) = 1$. Essa ha come soluzione $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$.

Quindi risolviamo

$$\dot{x}_3 = -10x_3 + 1$$

con condizione iniziale $x_3(0) = 0$. La soluzione è

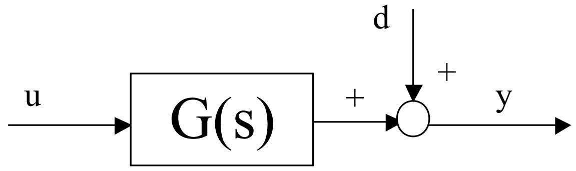
$$x_3(t) = \int_0^t e^{-10(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}),\ t \geq 0.$$

Quindi, $y(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-10t})$, $t \geq 0$.

4. Si consideri lo schema in figura dove

$$G(s) = 20\frac{1-s}{(s+0.01)(s+10)(s+200)}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita.



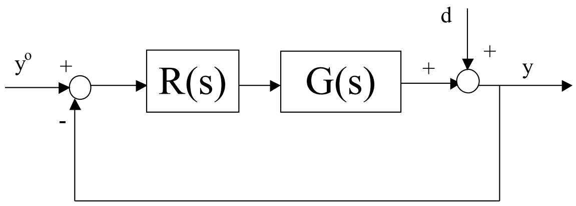
4.1 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$. Quanto è il tempo necessario perchè la risposta raggiunga il comportamento di regime determinato?

Il segnale $y(t)$ è determinato dalla somma della risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ e del disturbo $d(t)$. Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile (è di ordine 3 e ha 3 poli reali negativi), quindi la sua risposta allo scalino tende al guadagno $G(0) = 1$, per cui

$$y_\infty(t) = 1 + sen(0.01t).$$

Il tempo necessario perchè la risposta raggiunga il comportamento di regime $y_\infty(t)$ è pari al tempo di assestamento del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ a poli reali e cioè $T_a \simeq 5\tau_d$ unità di tempo dove τ_d è la costante di tempo dominante, in questo caso uguale a $\frac{1}{0.01} = 100$ perchè il polo dominante è $p_d = -0.01$. Quindi $T_a \simeq 500$.

4.2 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura.



Progettare $R(s)$ di ordine minimo in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) l'errore di inseguimento $e(t) = y°(t) - y(t)$ quando $y°(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, tende a zero;

ii) il margine di fase è circa $\pi/2$;

iii) la pulsazione critica è maggiore o uguale a 0.1.

$$R(s) = 0.1\,\frac{1 + s/0.01}{s}.$$

Per questa scelta di $R(s)$ la pulsazione critica è $\omega_c \simeq 0.1$ e il margine di fase $\phi_m \simeq \pi/2$.

4.3 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime del sistema retroazionato progettato quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$. Quanto è il tempo necessario perchè la risposta raggiunga il comportamento di regime determinato?

Dato che il sistema di controllo progettato è lineare, la risposta di regime è data dalla somma delle risposte di regime associate a $y^\circ(t) = sca(t)$, $t \geq 0$, e a $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$.

La funzione di traferimento da y° a y è

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}.$$

Dato che $\phi_m > 0,4\pi$ ed che è stato inserito un integratore in $R(s)$, l'approssimazione a poli dominanti di $F(s)$ è:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + s/\omega_c} = \frac{1}{1 + 10s}.$$

Quindi, la risposta a $y^\circ(t) = sca(t)$, $t \geq 0$, si assesta al guadagno $F(0) = 1$ in $T_a \simeq 50$ unità di tempo.

La funzione di traferimento da d a y è

$$H(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

ed ha gli stessi poli di $F(s)$ e quindi polo dominante in $-\omega_c = -0.1$.

Per il teorema della risposta in frequenza e dato che il polo dominante è $p_d = -0.1$, la risposta a $d(t) = sen(0.01t)$ si assesta in $T_a \simeq 50$ unità di tempo a

$$y_{d,\infty}(t) = |H(i0.01)| sen(0.01t + \arg(H(i0.01))).$$

Visto che la pulsazione del disturbo è $0.01 << \omega_c = 0.1$, allora

$$H(i0.01) = \frac{1}{1 + R(i0.01)G(i0.01)} \simeq \frac{1}{R(i0.01)G(i0.01)}$$

da cui $|H(i0.01)| \simeq 0.1$ e $\arg(H(i0.01)) \simeq -\arg(R(i0.01)G(i0.01))) \simeq \pi/2$.

Concludendo, la risposta del sistema retroazionato progettato a $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$, si assesta in 50 unità di tempo allla risposta di regime:

$$y_\infty(t) = 1 + 0.1 sen(0.01t + \pi/2).$$

5. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Descrivere quale è la struttura di un regolatore PID, specificando il ruolo svolto dalle azioni proporzionale, integrale e derivativa.

Si veda il libro di testo.

b) Enunciare il criterio degli autovalori per un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto.

Si veda il libro di testo.