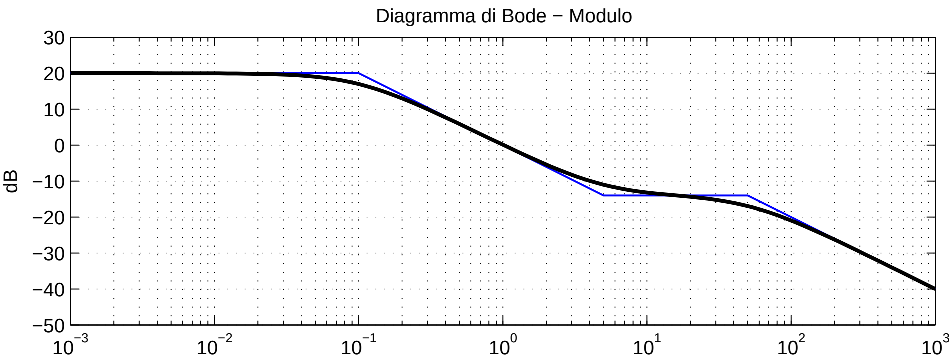
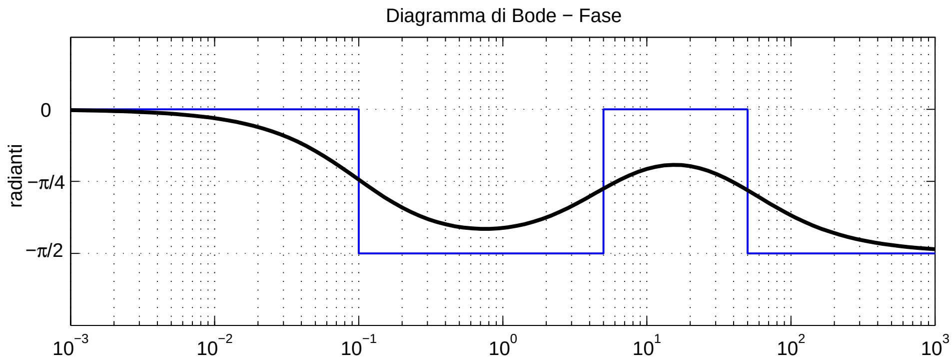
Testo con soluzione
II prova in itinere di Fondamenti di Automatica - 06/02/2007
Prof. Maria Prandini

1. In figura sono riportati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante di ordine 2 con ingresso u ed uscita y.





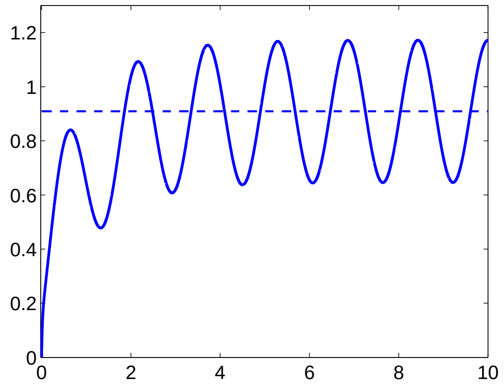
1.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è strettamente proprio.
Vero. Il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$ ha pendenza negativa per ω che tende all'infinito. Quindi il numero di poli è maggiore del numero degli zeri di $G(s)$.

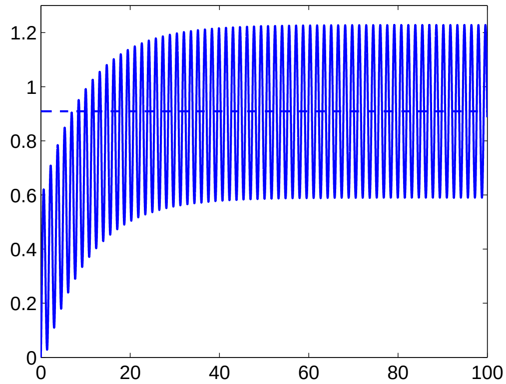
b) il sistema è asintoticamente stabile.
Vero. Dai diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata a $G(s)$ si evince che $G(s)$ ha 2 poli reali $p_1 = -0.1$ e $p_2 = -50$. I poli sono tutti e soli gli autovalori del sistema dato che l'ordine è 2. Quindi per il criterio degli autovaolri il sistema è asintoticamente stabile.

c) il sistema è a fase minima.
Vero. Tutte le singolarità (poli e zeri) di $G(s)$ sono a parte reale negativa (due poli $p_1 = -0.1$ e $p_2 = -50$, e uno zero $z = -5$).

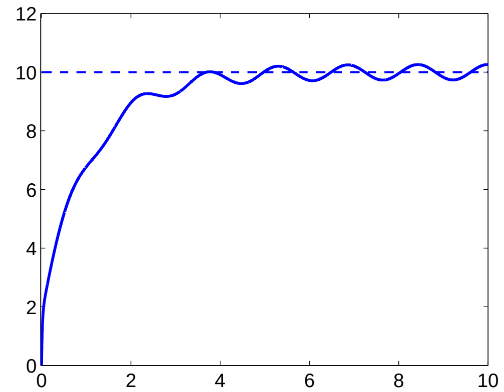
1.2 Dire, motivando la risposta, quale dei grafici (a), (b), (c), e (d) sotto riportati rappresenta la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = sca(t) + sen(4t)$.



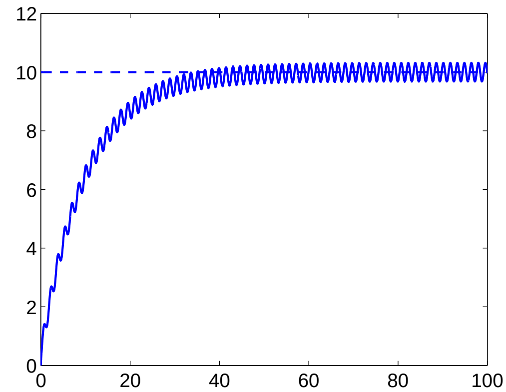
(a)



(b)



(c)



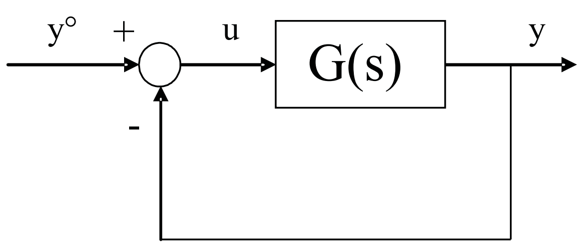
(d)

Essendo il sistema asintoticamente stabile con polo dominante $p_d = -0.1$, il transitorio della risposta forzata si esaurisce in $T_a \simeq 50$ unità di tempo.

Per quanto riguarda il comportamento di regime a cui tende la risposta forzata, sarà la somma delle risposte di regime agli ingressi $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sen(4t)$, cioè $y_\infty(t) = y_{1,\infty}(t) + y_{2,\infty}(t)$, $t \geq 50$, dove $y_{1,\infty}(t) = G(0) = 10$ e $y_{2,\infty}(t) = |G(i4)| sen(4t + \angle G(i4)) \simeq \frac{1}{\sqrt{10}} sen(4t + \angle G(i4))$.

Si tratta quindi del grafico (d).

1.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato con retroazione negativa unitaria come indicato in figura.



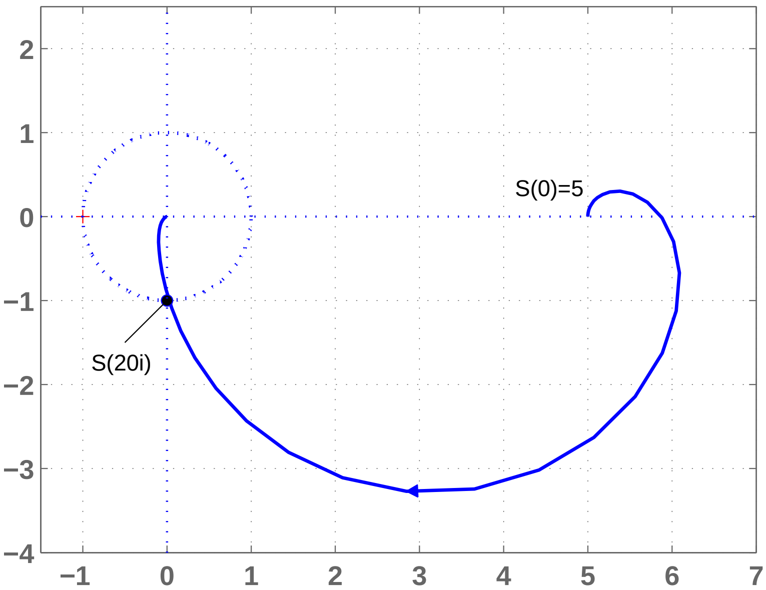
Dire, motivando la risposta, quale dei grafici (a), (b), (c), e (d) riportati al punto 1.2 rappresenta la risposta forzata del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = sca(t) + sen(4t)$.

La funzione di trasferimento tra y° e y è la funzione di sensitività complementare $F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$.
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per il criterio di Bode. La pulsazione critica è $\omega_c = 1$ e il margine di fase è $\phi_m > 0.4\pi$, quindi $F(s)$ ha un polo dominante reale $p_d \simeq -1$.

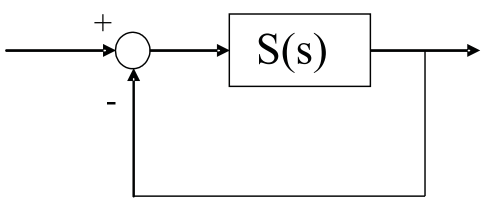
Da queste considerazioni segue che il transitorio della risposta forzata si esaurisce in $T_a \simeq 5$ unità di tempo.

Per quanto riguarda il comportamento di regime a cui tende la risposta forzata, sarà la somma delle risposte di regime agli ingressi $y_1^\circ(t) = sca(t)$ e $y_2^\circ(t) = sen(4t)$, cioè $y_\infty(t) = y_{1,\infty}(t) + y_{2,\infty}(t)$, $t \geq 5$, dove $y_{1,\infty}(t) = F(0) = \frac{G(0)}{1+G(0)} = \frac{10}{11}$ e $y_{2,\infty}(t) = |F(i4)| sen(4t + \angle F(i4)) \simeq |G(i4)| sen(4t + \angle G(i4)) \simeq \frac{1}{\sqrt{10}} sen(4t + \angle G(i4))$ (perchè $\omega = 4 > \omega_c = 1$).
Si tratta quindi del grafico (a).

2. In figura è riportato il diagramma polare della funzione di trasferimento $S(s)$ di un sistema lineare tempo invariante asintoticamente stabile a poli reali.
Si noti che $S(s)$ soddisfa la condizione $|S(20i)| = 1$, evidenziata in figura tramite il tracciamento della circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine.



Il sistema viene retroazionato secondo lo schema di retroazione negativa unitaria riportato in figura.



2.1 Verificare che il sistema retroazionato soddisfa il criterio di Bode per l'asintotica stabilità.

Le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

i) le eventuali parti nascoste del sistema con funzione di trasferimento $S(s)$ sono asintoticamente stabili,

ii) $S(s)$ non ha poli a parte reale strettamente positiva, e

iii) esiste ed è unica la pulsazione ω_c tale che $|S(i\omega_c)| = 1$ (pulsazione critica),

sono soddisfatte. In particolare le ipotesi i) e ii) sono soddisfatte perchè il sistema con funzione di trasferimento $S(s)$ è asintoticamente stabile, mentre l'ipotesi iii) è soddisfatta perchè il diagramma polare di $S(s)$ presenta una sola intersezione con la circonferenza di raggio unitario in corrispondenza di $\omega_c = 20$.

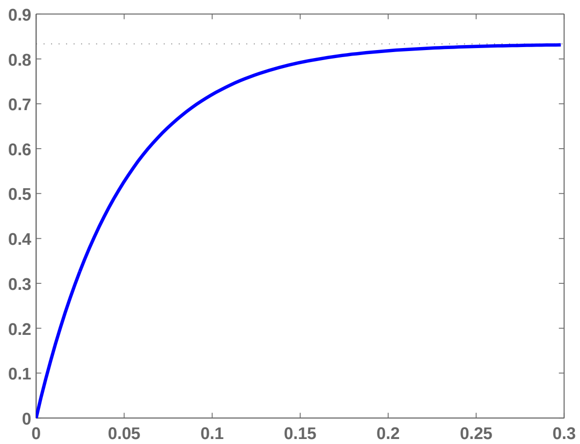
Per il criterio di Bode il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se il guadagno generalizzato μ_S di $S(s)$ ed il margine di fase $\phi_m = \pi - |\angle S(i\omega_c)|$ sono entrambi positivi. Dal diagramma polare di $S(s)$ si vede che $\mu_S = S(0) = 5 > 0$ e $\phi_m \simeq \frac{\pi}{2} > 0$, per cui si può concludere che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

2.2 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema retroazionato.

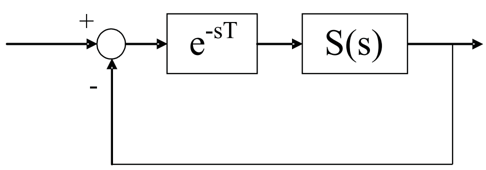
Ai fini del tracciamento qualitativo della risposta allo scalino, consideriamo l'approssimazione a poli dominanti della funzione di sensitività complementare $F(s) = \frac{S(s)}{1+S(s)}$. Dato che $\phi_m \simeq \frac{\pi}{2} > 0.4\pi$ tale approssimazione è data da:

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c},$$

dove $\mu_F = \frac{\mu_S}{1+\mu_S} = \frac{5}{6}$ e $\omega_c = 20$.



2.3 Si supponga che sia presente un ritardo $T > 0$ nell'anello di retroazione, come indicato nella figura sottostante.



Dire, motivando la risposta, se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile quando $T = 0.1$ unità di tempo.

La funzione di trasferimento del sistema retroazionato con retroazione negativa unitaria è: $S(s)e^{-sT}$. Il diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata coincide con quello di $S(s)$, non vengono introdotte parti nascoste nè poli, quindi rimane applicabile il criterio di Bode per la valutazione dell'asintotica stabilità. La pulsazione critica rimane invariata $\omega_c = 20$, il guadagno di $S(s)$ è positivo, cambia il margine di fase che diventa:

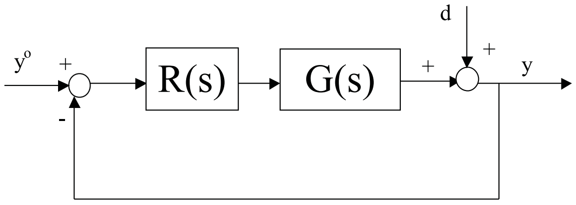
$$\phi_m = \pi - |\angle S(i\omega_c) - \omega_c T| = \pi - | - \pi/2 - 20 \cdot 0.1| = \pi/2 - 2 < 0$$

Per il criterio di Bode si può concludere che il sistema retroazionato non è asintoticamente stabile.

3. Si consideri lo schema di controllo in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+0.001s)^2}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita e $R(s)$ è la funzione di trasferimento di un regolatore PI da progettare: $R(s) = k(1+\frac{1}{sT_I})$.



3.1 Determinare i parametri k e T_I del regolatore PI in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) il disturbo sinusoidale $d(t) = 0.1sen(\omega_d t)$, con pulsazione $\omega_d \leq 10$, viene attenuato di un fattore pari ad almeno 10 sull'uscita y;

ii) se $y^\circ(t) = 10sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, allora l'uscita $y(t)$ si assesta al valore 10;

iii) la pulsazione critica ω_c soddisfa il vincolo: $\omega_c > 1$.

La struttura del regolatore PI è tale per cui si può introdurre un polo nell'origine e un solo zero.

La funzione di trasferimento tra d e y è la funzione di sensitività: $S(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)}$. Sulla base del teorema della risposta per soddisfare il requisito i) è quindi necessario che

$$|S(i\omega)| = \frac{1}{|1+R(i\omega)G(i\omega)|} < \frac{1}{10}, \ \omega \leq 10,$$

Questa condizione è soddisfatta se $|R(i\omega)G(i\omega)| > 10$, $\omega \leq 10$. Questo implica che $\omega_c > 10$, vincolo più restrittivo della condizione iii).

Per soddisfare il requisito statico al punto ii) di errore di inseguimento di un riferimento a scalino nullo è necessario utilizzare l'integratore del regolatore PI.

Dato che $G(s)$ ha poli $p_1 = -0.1$ e $p_2 = p_3 = -1000$, per garantire la stabilità del sistema retroazionato con $\omega_c > 10$, introduciamo uno zero a cancellare il polo p_1 che insieme al polo nell'origine di $R(s)$ e ai due poli p_2 e p_3 porterebbe altrimenti ad avere $G(i\omega_c)R(i\omega_c) < -\pi$:

$$R(s) = \mu_R \frac{1+10s}{s}$$

Il guadagno μ_R di $R(s)$ va scelto in modo da garantire che $|R(i\omega)G(i\omega)| > 10$, $\omega \leq 10$, e al tempo stesso limitare il valore di ω_c per evitare che i poli $p_2 = p_3 = -1000$ influiscano sulla fase critica $\angle(R(i\omega_c)G(i\omega_c))$ rendedola inferiore a $-\pi$. Una scelta possibile è

$$R(s) = 100\frac{1+10s}{s}$$

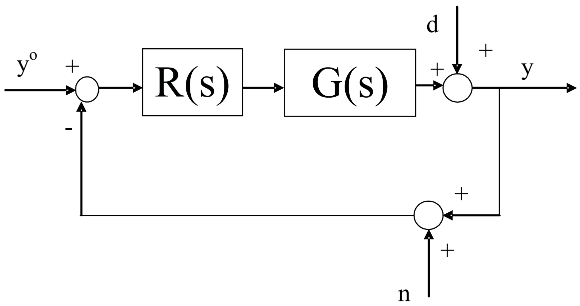
a cui corrisponde $\omega_c = 100$.

Confrontando questa espressione con quella di un generico PI:

$$R(s) = k\big(1 + \frac{1}{sT_I}\big) = \frac{k}{T_I}\frac{1 + sT_I}{s}$$

si ottiene $T_I = 10$ e $k = 1000$.

3.2 Il sensore che effettua la misura dell'uscita y è affetto da un disturbo n, come schematizzato nella figura sottostante.



Con riferimento al sistema di controllo progettato al punto 3.1, valutare se il disturbo di misura $n(t) = sen(\omega_n t)$ con pulsazione $\omega_n \geq 10^4$ viene attenuato sull'uscita di un fattore pari ad almeno 10.

La funzione di trasferimento tra n e y è

$$-\frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Per il teorema della risposta in frequenza, la risposta di regime del sistema retroazionato a $n(t) = sen(\omega_n t)$ è

$$y_\infty(t) = \left|\frac{R(i\omega_n)G(i\omega_n)}{1 + R(i\omega_n)G(i\omega_n)}\right| sen(\omega_n t - \angle\frac{R(i\omega_n)G(i\omega_n)}{1 + R(i\omega_n)G(i\omega_n)})$$

Dato che $\omega_n \geq 10^4 > \omega_c = 100$ allora

$$\left|\frac{R(i\omega_n)G(i\omega_n)}{1 + R(i\omega_n)G(i\omega_n)}\right| \simeq |R(i\omega_n)G(i\omega_n)| < 1$$

Inoltre, visto che la pendenza del diagramma di Bode del modulo di $R(i\omega)G(i\omega)$ è minore o uguale a $-20dB/decade$ dopo $\omega_c = 100$, alle pulsazioni di interesse $\omega_n \geq 10^4$ (2 decadi oltre ω_c) si ha che $|R(i\omega_n)G(i\omega_n)| \leq \frac{1}{100}$, quindi il disturbo di misura n è attenuato di un fattore pari ad almeno 100.

4. Rispondere in modo conciso e chiaro ai seguenti quesiti:

4.1 Disegnare lo schema a blocchi del sistema di controllo digitale a campionamento dell'errore di inseguimento, spiegando brevemente il ruolo svolto dai suoi componenti.

Si veda il libro di testo.

4.2 Scrivere le istruzioni Matlab per il tracciamento della risposta forzata allo scalino di un sistema dinamico lineare tempo invariante di ordine 1, la cui funzione di trasferimento ha guadagno pari a 5, un polo in -10 ed uno zero in -1.

Si vedano i lucidi delle esercitazioni di laboratorio.