TESTO CON SOLUZIONE
I PROVA IN ITINERE DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA - 21/11/2006
PROF. MARIA PRANDINI

1. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2\beta x_1^2(t) + 2\beta x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2^2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_2(t)\end{aligned} \tag{1}$$

dove β è un parametro reale non nullo ($\beta \neq 0$).

1.1 Dire, motivando la risposta, se il sistema è lineare o non lineare, statico o dinamico, tempo variante o tempo invariante, strettamente proprio o proprio.

Il sistema è:
- non lineare, perchè il secondo membro delle equazioni di stato non è una combinazione lineare delle variabili di stato e dell'ingresso.
- dinamico, perchè l'uscita al generico istante t non può essere determinata sulla base della conoscenza del solo ingresso allo stesso istante t.
- tempo invariante, perchè i coefficienti delle equazioni del sistema non dipendono dal tempo.
strettamente proprio, perchè nella trasformazione di uscita non compare l'ingresso.

1.2 Determinare gli stati e le uscite di equilibrio ($(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e $\bar{y}$) associati all'ingresso costante $u(t) = 1$, $t \geq 0$.

Il valore dell'equilibrio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato calcolato ponendo $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 1$, $\forall t$.

$$\begin{cases} -2\beta\bar{x}_1^2 + 2\beta\bar{x}_2 = 0\\ -\bar{x}_2^2 + 1 = 0\end{cases}$$

da cui si ottiene, tenendo conto del fatto che $\beta \neq 0$,

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \pm 1\\ \bar{x}_1^2 = \bar{x}_2\end{cases}$$

La seconda equazione non ammette soluzioni nell'insieme dei numeri reali quando $\bar{x}_2 = -1$. Per $\bar{x}_2 = 1$, si ottengono invece due stati di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 1\\ \bar{x}_2 = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -1\\ \bar{x}_2 = 1\end{cases}$$

a cui corrisponde la stessa uscita di equilibrio $\bar{y} = 1$.

1.3 Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio determinato al punto precedente con $\bar{x}_1 > 0$.

Le equazioni del sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$ associato all'ingresso $u(t) = 1$, $t \geq 0$, calcolato al punto precedente sono:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta x_1} &= -4\beta\Delta x_1 + 2\beta\Delta x_2\\ \dot{\Delta x_2} &= -2\Delta x_2 + \Delta u\\ \Delta y &= \Delta x_2\end{aligned}$$

1.4 Sulla base dell'analisi del sistema linearizzato determinato al punto precedente, dire per quali valori del parametro β ($\beta \neq 0$) lo stato di equilibrio corrispondente è instabile.

La matrice dinamica del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} -4\beta & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ed ha autovalori: $\lambda_1 = -4\beta$ e $\lambda_2 = -2$. Condizione sufficiente per concludere che lo stato di equilibrio è instabile è che la matrice A abbia almeno un autovalore a parte reale positiva, da cui segue che per $\beta < 0$ lo stato di equilibrio è instabile. Per $\beta > 0$ invece lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile perchè entrambi gli autovalori di A sono a parte reale strettamente negativa.

2. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) \end{cases}$$

2.1 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema. E' possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi di $G(s)$?

$$sX_2(s) = -5X_2(s) + U(s)$$

da cui

$$X_2(s) = \frac{1}{s+5}U(s).$$

$$sX_1(s) = -1X_1(s) + \frac{1}{s+5}U(s),$$

da cui

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}U(s).$$

e

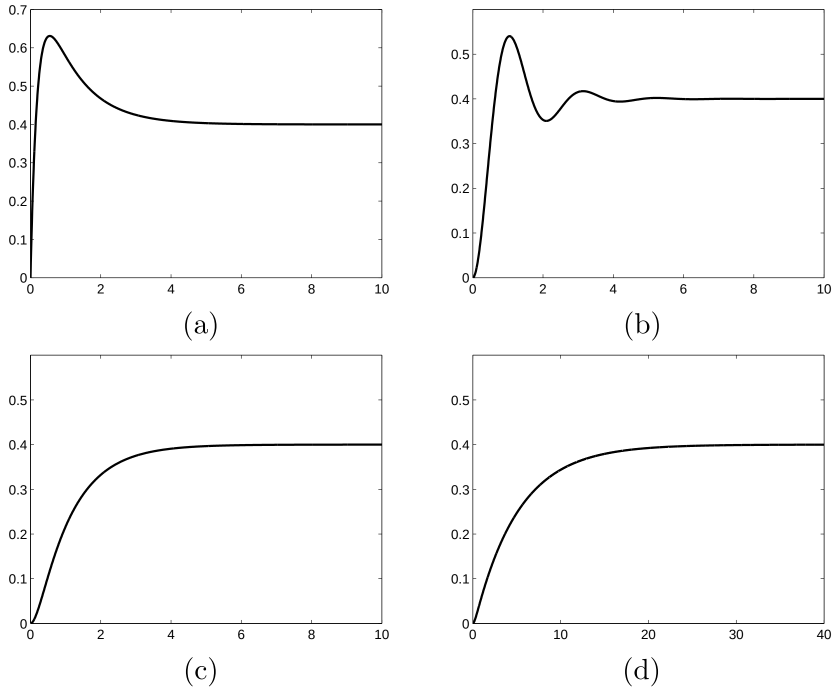
$$Y(s) = 2X_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)}U(s).$$

La funzione di trasferimento è quindi:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)}.$$

Il sistema è di ordine 2 e la funzione di trasferimento $G(s)$ calcolata ha due poli. I poli sono quindi tutti e soli gli autovalori del sistema e dall'analisi di $G(s)$ è quindi possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema. In particolare, dato che i poli sono entrambi reali negativi, applicando il criterio degli autovalori, è possibile concludere che il sistema è asintoticamente stabile.

2.2 Dire, motivando la risposta, quale tra gli andamenti sotto riportati rappresenta la risposta forzata allo scalino del sistema.



(a) (b) (c) (d)

Si tratta dell'andamento riportato nella figura (c).

Il sistema è a soli poli e reali, quindi si possono escludere gli andamenti di figura (a) (caratteristico della risposta allo scalino di un sistema a fase minima con 2 poli reali ed uno zero di modulo inferiore a quello dei poli) e di figura (b) (caratteristico di un sistema con poli complessi coniugati e smorzamento piccolo). L'andamento di figura (d) invece si può escludere una volta osservato che il polo dominante di $G(s)$ è $p = -1$ e quindi il tempo di assestamento della risposta allo scalino del sistema è circa 5 unità di tempo, non 30.

2.3 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 1$, e all'ingresso $u(t) = 5$, $t \geq 0$.

La seconda equazione di stato non dipende dalla prima. $\bar{x}_2 = 1$ è il valore di equilibrio di x_2 associato a $u(t) = 5, \forall t$. Il movimento di x_2 associato a $u(t) = 5$, $t \geq 0$, e $x_2(0) = 1$ è quindi $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$. Sostituendo $x_2(t) = 1$, $t \geq 0$ nella prima equazione, si ha

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 1.$$

Risolvendo questa equazione differenziale con forzante costante e condizione iniziale $x_1(0) = 2$, si ottiene

$$x_1(t) = 2e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 + e^{-t},\ t \geq 0.$$

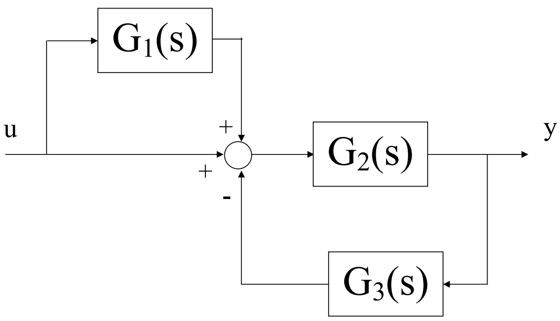
Dalla trasformazione di uscita segue:

$$y(t) = 2 + 2e^{-t},\ t \geq 0.$$

2.4 Si consideri il movimento forzato ($x_1(0) = x_2(0) = 0$) dell'uscita associato all'ingresso $u(t) = 5$, $t \geq 0$. Dire, motivando la risposta, a quale valore tende asintoticamente la differenza tra di esso ed il movimento dell'uscita calcolato al punto precedente.

La differenza tra i due movimenti tende a zero. Questa affermazione può essere giustificata osservando che i due movimenti sono associati allo stesso ingresso e, dato che il sistema è lineare, la loro differenza è quindi uguale (a meno del segno) al movimento libero associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 1$. Il sistema è asintoticamente stabile e per questo il movimento libero tende a zero per ogni condizione iniziale.

3. Si consideri lo schema in figura, dove $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$ sono le funzioni di trasferimento di sistemi lineari tempo invarianti completamente raggiungibili e osservabili.



3.1 Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in termini di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

Il sistema è ottenuto collegando in serie i sistemi con funzione di trasferimento

$$G_a(s) = G_1(s) + 1$$

e

$$G_b(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

per cui

$$H(s) = (G_1(s) + 1)\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}$$

3.2 Posto $G_1(s) = \frac{1}{s+9}$, $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$, e $G_3(s) = \frac{s+1}{s+9}$ nell'espressione calcolata al punto precedente:

(a) verificare che $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$;

(b) valutare le proprietà di stabilità del sistema con ingresso u ed uscita y.

$$G_a(s) = G_1(s) + 1 = \frac{s+10}{s+9}$$

$$G_b(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+9}} = \frac{s+9}{(s+1)(s+10)}$$

da cui

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Le proprietà di stabilità del sistema con ingresso u ed uscita y non possono essere valutate sulla base della sola $H(s)$: il sistema è di ordine 3 e $H(s)$ ha un solo polo reale negativo. Nell'interconnessione si è generata una parte nascosta, non raggiungibile e/o non osservabile, con 2 autovalori. Bisogna capire quali sono questi autovalori. Si osservi a tale scopo che il sistema è ottenuto come serie di due sistemi: uno di ordine 1 con funzione di trasferimento $G_a(s)$ con 1 polo, e l'altro di ordine 2 con funzione di trasferimento $G_b(s)$ con 2 poli. Gli autovalori di un sistema ottenuto per connessione in serie di 2 sistemi sono dati dall'unione degli autovalori dei sistemi componenti. Gli autovalori del sistema sono quindi dati dall'unione dei poli di $G_a(s)$ e di $G_b(s)$: $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -10$. Per il criterio degli autovalori, il sistema è asintoticamente stabile.

3.3 Determinare la trasformata di Laplace $Y(s)$ della risposta forzata del sistema con funzione di trasferimento $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$ all'ingresso $u(t) = e^t$, $t \geq 0$. Calcolare l'antitrasformata di $Y(s)$ e valutare, se possibile, la correttezza dell'espressione ottenuta applicando i teoremi del valore iniziale e finale alla trasformata $Y(s)$.

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

Utilizziamo il metodo dei fratti semplici per calcolare l'antitrasformata:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}$$

da cui

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}, \ t \geq 0$$

Il teorema del valore iniziale è applicabile perchè la trasformata $Y(s)$ è strettamente propria, mentre quello del valore finale non è applicabile perchè $Y(s)$ ha tra le radici del denominatore $s = 1$.

In base al teorema del valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(s+1)(s-1)} = 0$$

ed effettivamente l'espressione analitica di $y(t)$ calcolata soddisfa $y(0) = 0$.

4. Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) in un sistema lineare asintoticamente stabile, il movimento dell'uscita rimane limitato qualunque sia l'ingresso applicato.

Falsa. Il movimento libero rimane limitato (tende infatti a zero), mentre il movimento forzato può anche divergere, dipende dall'ingresso (si veda, per esempio, il movimento forzato calcolato nell'esercizio precedente corrispondente all'ingresso $u(t) = e^t$, $t \geq 0$).

b) se un sistema lineare asintoticamente stabile ha funzione di trasferimento con uno zero in $+2$, allora la sua risposta all'ingresso esponenziale e^{2t} tende a zero a regime.

Vero. La funzione di trasferimento di un sistema lineare asintoticamente stabile con uno zero in $+2$ è della forma

$$G(s) = \frac{(s-2)\tilde{N}(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

con i poli p_i tutti a parte reale strettamente negativa.

La trasformata di Laplace della risposta forzata all'ingresso esponenziale e^{2t} è $Y(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$.

Ad essa è applicabile il teorema del valore finale, e quindi la risposta all'ingresso esponenziale e^{2t} del sistema tende asintoticamente a

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} sY(s) = 0.$$

c) un sistema lineare ottenuto per interconnessione di due sistemi lineari è asintoticamente stabile se e solo i poli della sua funzione di trasferimento sono a parte reale negativa.

Falso. La condizione è necessaria ma non sufficiente perchè i poli sono in generale solo un sottoinsieme degli autovalori.