TESTO CON SOLUZIONE
III APPELLO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA - 7/9/2007
PROF. MARIA PRANDINI

1. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

1.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 2$ e all'ingresso $u(t) = 5$, $t \geq 0$.

Dato che le equazioni di stato sono identiche ed anche le condizioni iniziali, allora $x_1(t) = x_2(t)$, $t \geq 0$, e quindi $y(t) = 2x_1(t)$, $t \geq 0$.

Basta quindi determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), \quad x_1(0) = 2,\, u(t) = 5,\, t \geq 0.$$

Essa è

$$x_1(t) = e^{-t}x_1(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau = 5 - 3\,e^{-t},\ t \geq 0,$$

da cui segue:

$$y(t) = 10 - 6\,e^{-t},\ t \geq 0.$$

1.2 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema. È possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi di $G(s)$?

Applicando la trasformata di Laplace alla prima equazione di stato (sotto l'ipotesi di considerare nulle le condizioni iniziali), si ottiene

$$sX_1(s) = -X_1(s) + U(s).$$

Da cui

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}\,U(s).$$

Analogamente si ottiene:

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1}\,U(s).$$

Dalla trasformazione di uscita si ha:

$$Y(s) = X_1(s) + X_2(s) = \frac{2}{s+1}\,U(s)$$

per cui

$$G(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Dato che la funzione di trasferimento ottenuta ha un solo polo reale negativo mentre il sistema è di ordine 2, c' è un autovalore *nascosto*. Di conseguenza non è possibile concludere circa le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi della sola $G(s)$.

1.3 Determinare l'espressione analitica della <u>risposta di regime</u> del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ all'ingresso $u(t) = sca(t) + sen(0.1t)$.

Valutare il tempo necessario affinchè la risposta del sistema si assesti a quella di regime calcolata.

Dato che il sistema è ha un solo polo reale negativo, ha senso parlare di risposta di regime.

La trasformata di Laplace della risposta forzata all'ingresso $u(t) = sca(t) + sen(0.1t)$ è:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\mathcal{L}[sca(t) + sen(0.1t)] = G(s)\mathcal{L}[sca(t)] + G(s)\mathcal{L}[sen(0.1t)].$$

Basta quindi calcolare quindi separatamente i contributi alla risposta di regime di $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sen(0.1t)$ e poi sommarli.

Per calcolare $y_{1,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema del valore finale:

$$y_{1,\infty}(t) = \lim_{s\to 0} sY_1(s) = \lim_{s\to 0} s\,G(s)\frac{1}{s} = G(0) = 2.$$

Per calcolare $y_{2,\infty}(t)$ utilizziamo il teorema della risposta in frequenza:

$$y_{2,\infty}(t) = |G(i0.1)|sen(0.1t + \arg G(i0.1)) \simeq 2sen(0.1t).$$

La risposta di regime richiesta è quindi

$$y_\infty(t) = 2 + 2sen(0.01t).$$

Il tempo di assestamento è:

$$T = 5\tau_d = 5\frac{1}{|Re(p_d)|} = 5\frac{1}{1} = 5.$$

dove τ_d indica la costante di tempo dominante e p_d il polo dominante.

2. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + 0.5u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t) - u(t)\\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}$$

2.1 Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 2$, $t \geq 0$.

I valori $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ degli stati di equilibrio si ottengono uguagliando a zero il secondo membro delle equazioni di stato e ponendo $x_1(t) = \overline{x}_1$ e $x_2(t) = \overline{x}_2$ e $u(t) = \overline{u} = 2$, $\forall t$:

$$\begin{cases} \overline{x}_1^2 - \overline{x}_1\overline{x}_2 + 1 = 0 \\ \overline{x}_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = 1 \\ \overline{x}_2 = 2 \end{cases}$$

L'uscita di equilibrio corrispondente si ottiene dalla trasformazione di uscita:

$$\overline{y} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 3.$$

2.2 Valutare le proprietà di stabilità del movimento di equilibrio determinato al punto 2.1.

Le equazioni del sistema linearizzato attorno al generico punto di equilibrio $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{u})$ sono caratterizzate da:

$$\Delta\dot{x}_2 = \Delta x_2 - \Delta u$$

come seconda equazione di stato, per cui la matrice dinamica del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio determinato al punto 2.1 è triangolare superiore

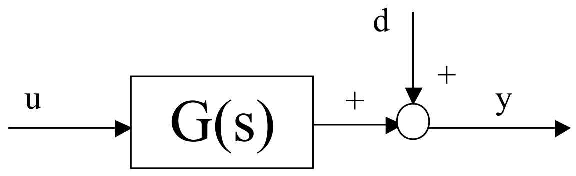
$$A = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con uno dei 2 autovalori uguale a 1. Possiamo quindi concludere che il movimento di equilibrio del sistema non lineare è instabile.

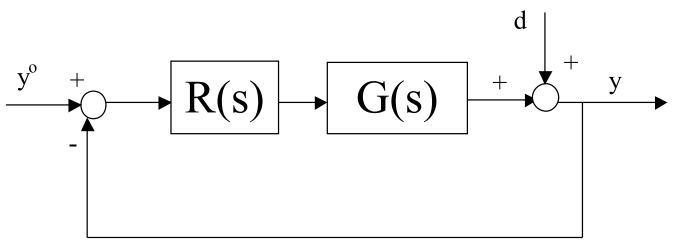
3. Si consideri lo schema in figura dove

$$G(s) = 2\frac{1-s}{(s+0.2)(s^2+2s+1)}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine affetto da un disturbo additivo sull'uscita.



3.1 Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in figura dove $R(s)$ è la funzione di trasferimento di un regolatore PI da progettare: $R(s) = k(1 + \frac{1}{sT_I})$.



Determinare i parametri k e T_I del regolatore PI in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) il disturbo sinusoidale $d(t) = sen(\omega_d t)$, con pulsazione $\omega_d \leq 0.01$, viene attenuato di un fattore pari ad almeno 10 sull'uscita y;

ii) l'errore di inseguimento $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$ quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, $t \geq 0$, tende a zero;

iii) il margine di fase è maggiore di $\pi/3$;

$$R(s) = \frac{1}{100}\frac{1+s/0.2}{s} = \frac{1}{20}(1+\frac{1}{5s})$$

cioè $k = \frac{1}{100}$ e $T_I = 5$.

In questo modo:

- il requisito statico al punto ii) di errore di inseguimento nullo a fronte di uno scalino sul riferimento è soddisfatto per la presenza di un integratore;

- il requisito i) è soddisfatto perchè $|L(i\omega_d)| = |R(i\omega_d)G(i\omega_d)| \geq 10$ per $\omega_d \leq 0.01$, e la funzione di trasferimeno tra d e y è $H_d(s) = \frac{1}{1+L(s)}$;

- alla pulsazione critica $\omega_c = 0.1$, si ha $\phi_m > \pi/3$.

3.2 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime del sistema retroazionato progettato quando $y°(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$. Quanto è il tempo necessario perchè la risposta raggiunga il comportamento di regime determinato?

Dato che il sistema di controllo progettato soddisfa la specifica ii), allora il contributo di $y°(t) = sca(t)$ alla risposta di regime è $y_{1,\infty}(t) = 1$.

Dato che la funzione di trasferimeno tra d e y è $H_d(s) = \frac{1}{1+L(s)}$, allora il contributo di $d(t) = sen(0.01t)$, $t \geq 0$, alla risposta di regime è

$$y_{2,\infty}(t) = |H_d(i0.01)|sen(0.01t + \arg H_d(i0.01)) \simeq 0.1sen(0.01t + \pi/2)$$

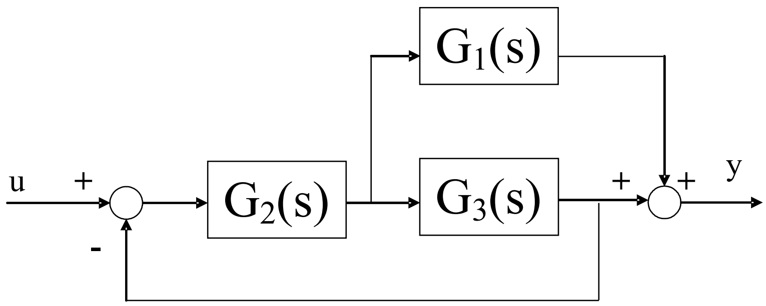
dove abbiamo usato l'approssimazione $H_d(i0.01) \simeq \frac{1}{L(i0.01)}$.

La risposta di regime richiesta è quindi

$$y_\infty(t) = 1 + 0.1sen(0.01t + \pi/2).$$

Dato che $\phi_m > \pi/3$, il tempo di assestamento può essere approssimato con $T \simeq 5/\omega_c = 50$ unità di tempo.

4. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y di ordine 3 in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari del 1^o ordine con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.



4.1 Dire, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa:

se $G_1(s) = \frac{1}{s+2}$ e la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y ha poli in -1 e -10, allora si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è asintoticamemte stabile.

Vero.

Il sistema è di ordine 3 e ha come autovalori i poli noti di $H(s)$, cioè -1 e -10, e il polo -2 di $G_1(s)$ che compare tra gli autovalori del sistema complessivo dato che il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ non è retroazionato. Dato che tutti e tre gli autovalori sono reali negativi, si può concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è asintoticamemte stabile.

4.2 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

La funzione H(s) del sistema complessivo è:

$$H(s) = G_1(s)\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} + \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}.$$

5. Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Disegnare lo schema a blocchi del sistema di controllo digitale a campionamento dell'errore di inseguimento, spiegando brevemente il ruolo svolto dai suoi componenti.

Si veda il libro di testo.

b) Scrivere le istruzioni Matlab per la determinazione della funzione di trasferimento del sistema ottenuto mediante interconnessione in parallelo di due sistemi lineari con funzione di trasferimento $F(s) = 10\frac{s+1}{s+2}$ e $H(s) = \frac{1}{(s+3)(s+10)}$.

Si vedano i lucidi delle esercitazioni di laboratorio.