*POLITECNICO DI MILANO*

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA
# (Ingegneria Informatica – Allievi da E a O)
## Prof. Maria Prandini

Anno Accademico 2013/14

II Prova in Itinere del 3 luglio 2014

SOLUZIONE

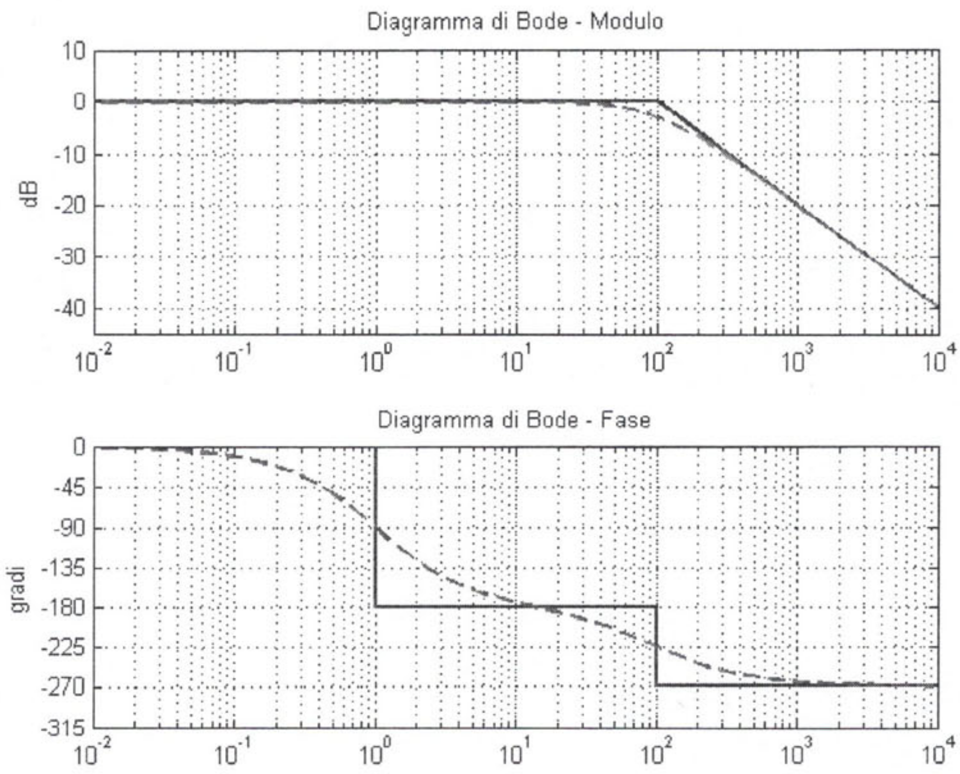
COGNOME E NOME ..................................................................

MATRICOLA ..........................................................................

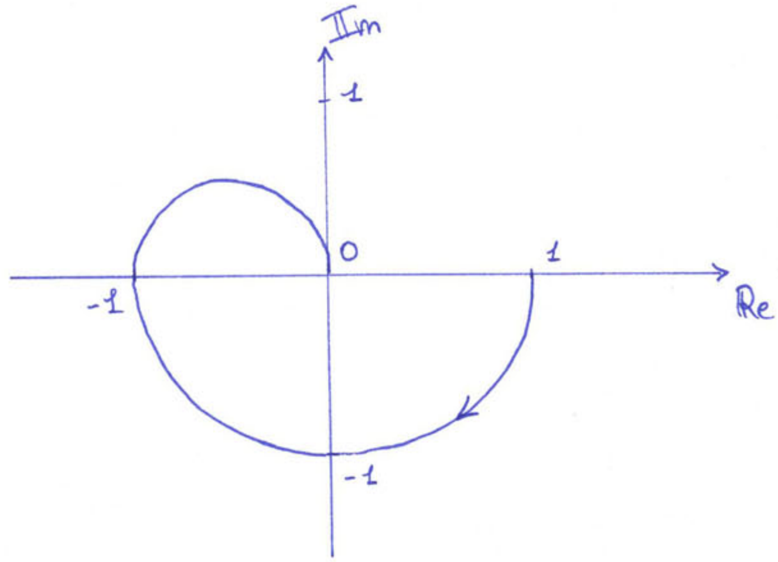
FIRMA ..................................................................................

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

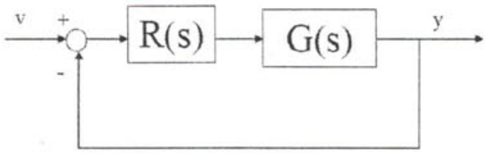
**1.** In figura sono riportati i diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare di ordine 2




1.1 Tracciare il diagramma polare di $G(s)$.

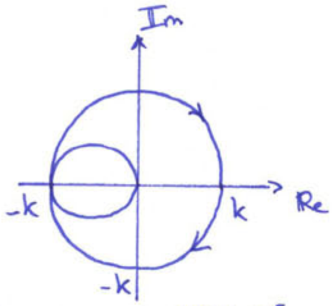


1.2 Il sistema viene retroazionato come in figura.




a) Posto $R(s) = k$, funzione di trasferimento di sistema statico lineare, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

OTTENIAMO FACILMENTE IL DIAGRAMMA POLARE DI $L(s) = kG(s)$ DAL PUNTO 1.1
E DI CONSEGUENZA ANCHE IL DIAGRAMMA DI NYQUIST DI $L(s)$




$k > 0 \Rightarrow$ IL DIAGRAMMA PARTE SUL SEMIASSE REALE POSITIVO

$G(s)$ NON HA POLI CON PARTE REALE POSITIVA $\Rightarrow P = 0$

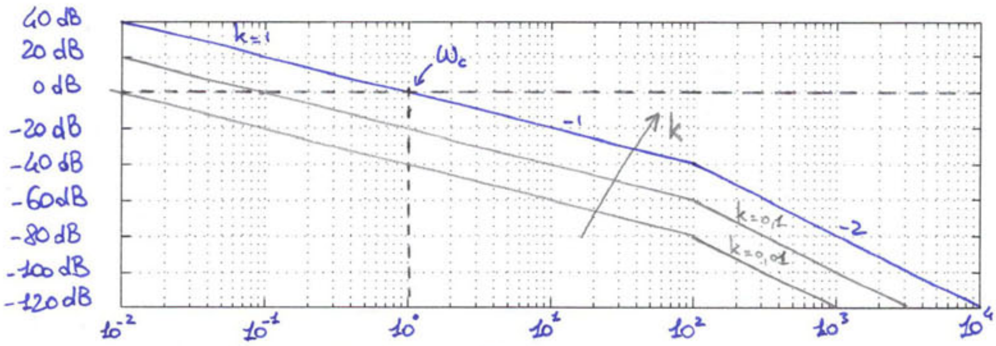
$0 < k < 1 \Rightarrow -k > -1 \Rightarrow N = 0$ (NESSUN GIRO ATTORNO A -1)

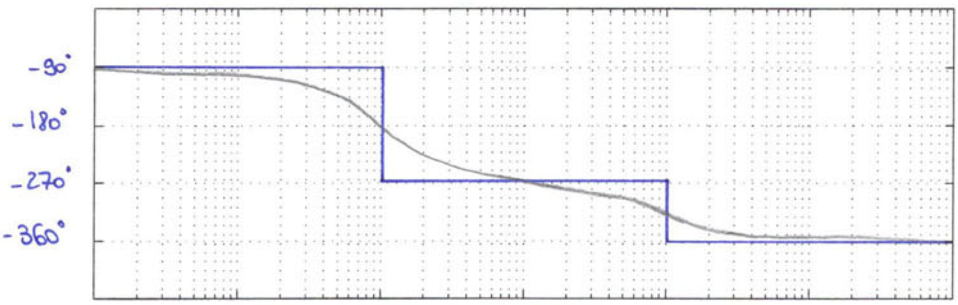
se $k > 1 \Rightarrow -k < -1 \Rightarrow N = -2$ (DUE GIRI IN SENSO ORARIO ATTORNO A -1)

$\Rightarrow$ PER IL CRITERIO DI NYQUIST $0 < k < 1$ GARANTISCE L'ASINTOTICA STABILITÀ

b) Posto $R(s) = \frac{k}{s}$, funzione di trasferimento di un sistema lineare di ordine 1, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k > 0$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

$P = 0$ SE $\exists !\ \omega_c : |L(j\omega_c)| = 1$ ALLORA SI PUÒ APPLICARE IL CRITERIO DI BODE




$$L(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1-s}{(1+s)(1+s/100)}$$

$\omega_c$ È SEMPRE BEN DEFINITA $\forall k$

DAI DIAGRAMMI DI BODE SI NOTA COME AL VARIARE DI $k$ VARI
IL DIAGRAMMA DEL MODULO E, DI CONSEGUENZA LA $\omega_c$
IL DIAGRAMMA DELLA FASE OVVIAMENTE NON DIPENDE DA $k$

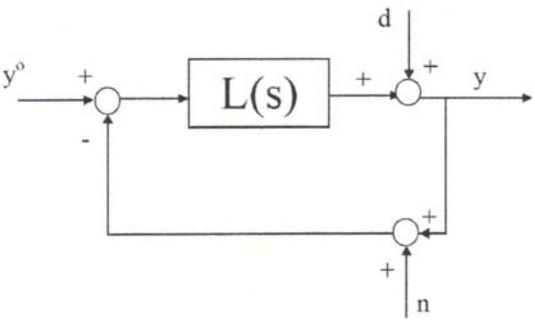
VALUTANDO SUL DIAGRAMMA REALE DELLA FASE $\measuredangle L(j\omega_c)$ SI NOTA COME
$\varphi_m > 0$ (CIOÈ $\measuredangle L(j\omega_c) > -180^\circ$) SOLO FINCHÉ $\omega_c < 1$, CIOÈ PER $k < 1$

$\Rightarrow$ L'ASINTOTICA STABILITÀ È GARANTITA DAL CRITERIO DI BODE SE $0 < k < 1$

**2.** Si consideri il sistema lineare di ordine 3 con funzione di trasferimento

$$L(s) = 0.1\frac{s+10^2}{s(s+10)^2} = \frac{0{,}1}{s}\cdot\frac{\cancel{100}\left(1+s/100\right)}{\cancel{100}\left(1+s/10\right)^2}$$

soggetto a disturbo additivo sull'uscita.
Il sistema viene retroazionato come in figura, dove $n(t)$ rappresenta un disturbo sulla misura dell'uscita $y(t)$.




2.1 Verificare mediante il criterio di Bode che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

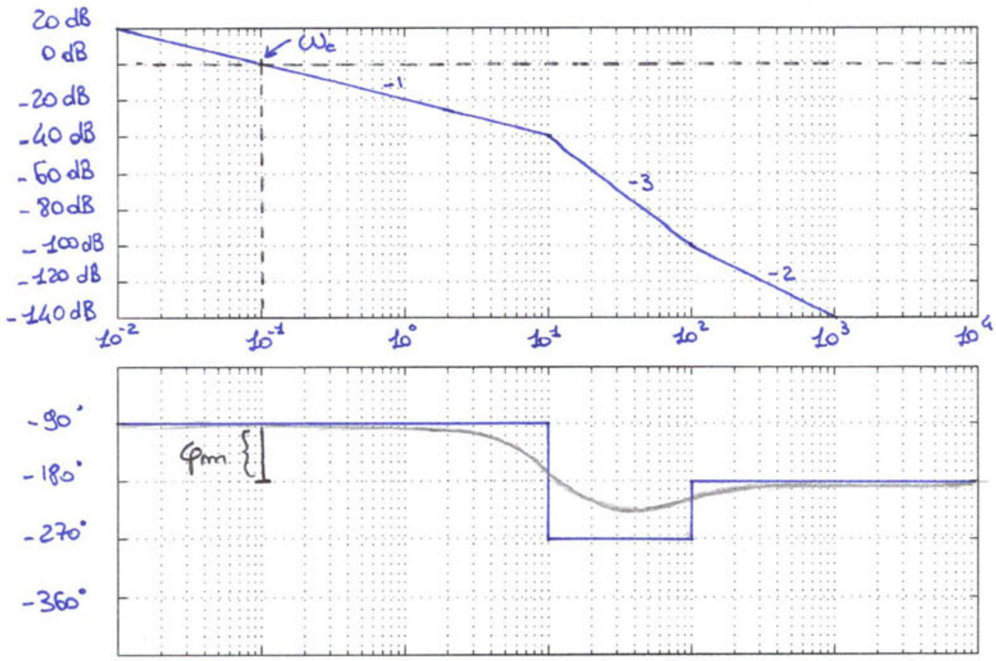
$P = 0 \Rightarrow$ POSSO APPLICARE BODE SE $\exists!\,\omega_c$

DAI DIAGRAMMI DELLA $L(s)$ SI VEDE CHIARAMENTE CHE $\omega_c \cong 0{,}1$ rad/s

INFATTI $|L(j0{,}1)| = \frac{0{,}1}{|j0{,}1|}\cdot\frac{|1+j10^{-3}|}{|1+j0{,}01|^2} \approx \frac{0{,}1}{|j0{,}1|} = 1 \Rightarrow$ OK

SEMPRE DAI DIAGRAMMI SI VEDE CHE $\varphi_m \approx 90^\circ$

INFATTI $\varphi_m = 180^\circ - \left|-90 - 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{0{,}1}{10}\right) + \mathrm{atan}\left(\frac{0{,}1}{100}\right)\right| \cong 89^\circ \Rightarrow$ OK IL SISTEMA AD ANELLO CHIUSO È ASINTOTICAMENTE STABILE




$L(s)$ A FASE MINIMA

$\Downarrow$

FASE = $-90 \times$ PENDENZE NORMALIZZATE

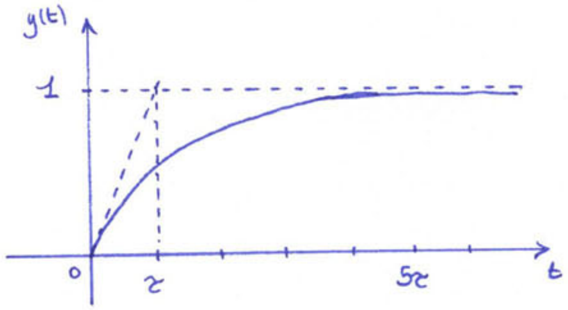
2.2 Posto $d(t) = n(t) = 0$, $t \geq 0$, tracciare l'andamento qualitativo del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ quando $y^\circ(t) = 1$, $t \geq 0$. Specificare valore iniziale, finale, e tempo di assestamento.

$\frac{Y(s)}{Y^\circ(s)} = F(s)$ $\quad \varphi_m > 60^\circ \Rightarrow F(s) \cong \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}$

LA PRESENZA DELL'INTEGRATORE NELLA $L(s)$ GARANTISCE $e_\infty = 0$ PER $y^\circ(t) = sca(t) \Rightarrow \mu_F = 1$

INFINE $L(s)$ È STRETTAMENTE PROPRIA $\Rightarrow y(0) = 0$

$\tau = \frac{1}{\omega_c} = 10$ udt

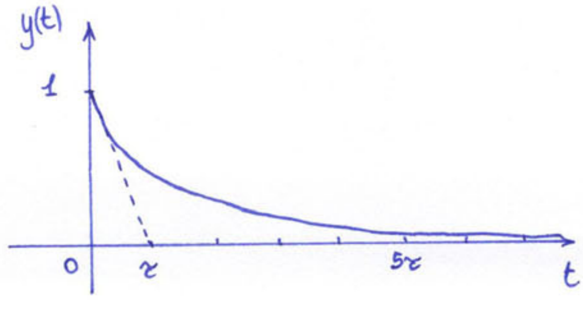



$y(0) = 0$ e $y_\infty = 1$ POSSONO ESSERE VERIFICATE CON I TEOREMI DEL VALORE INIZIALE E FINALE.

2.3 Posto $y^\circ(t) = n(t) = 0$, $t \geq 0$, tracciare l'andamento qualitativo del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ quando $d(t) = 1$, $t \geq 0$. Specificare valore iniziale, finale, e tempo di assestamento.

$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = 1 - \frac{L(s)}{1+L(s)} = 1 - F(s)$ $\quad Y(s) = D(s) - F(s)D(s)$ CON $D(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{sca(t)} - \underbrace{F(s) \cdot \frac{1}{s}}_{\text{STESSA RISPOSTA DI QUELLA CALCOLATA AL PUNTO 2.2}}$




$\Rightarrow y(t) = sca(t) - y_{2.2}(t)$

2.4 Dire, giustificando la risposta, quale tra i seguenti disturbi di misura viene attenuato, fatto passare invariato, oppure amplificato sull'uscita $y(t)$:
a) $n(t) = sen(10^{-2}t)$ $\omega_a = 0{,}01$ rad/s
b) $n(t) = cos(10^{-3}t)$ $\omega_b = 0{,}001$ rad/s
c) $n(t) = sen(10^{2}t)$ $\omega_d = 100$ rad/s

FdT DA $n$ A $y$ È $\frac{Y(s)}{N(s)} = -F(s) = -\frac{L(s)}{1+L(s)}$

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg 1 \text{ CIOÈ } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \text{ CIOÈ } \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

$\omega_c = 0{,}1$ rad/s

$\omega_a \ll \omega_c \Rightarrow |F(j\omega_a)| \cong 1 \Rightarrow n_a(t)$ PASSA INVARIATO

$\omega_b \ll \omega_c \Rightarrow |F(j\omega_b)| \cong 1 \Rightarrow n_b(t)$ PASSA INVARIATO

$\omega_d \gg \omega_c \Rightarrow |F(j\omega_d)| \simeq |L(j\omega_d)| = -100$ dB $\Rightarrow n_d(t)$ VIENE ATTENUATO DI UN FATTORE $10^5$

2.5 Si supponga che sia presente un ritardo $T > 0$ nel sistema, cioè che

$$L(s) = \frac{0.1(s+10^2)}{s(s+10)^2}e^{-sT}.$$

Determinare il valore massimo di $T$ oltre il quale il sistema retroazionato non è più asintoticamente stabile.

PER GARANTIRE $\varphi_m > 0$ DOBBIAMO IMPORRE $\angle L(j\omega_c) > -180°$

IL RITARDO NON INFLUISCE SUL MODULO DI $L(s) \Rightarrow$ LA $\omega_c$ NON CAMBIA

RICALCOLIAMO LA FASE CRITICA:

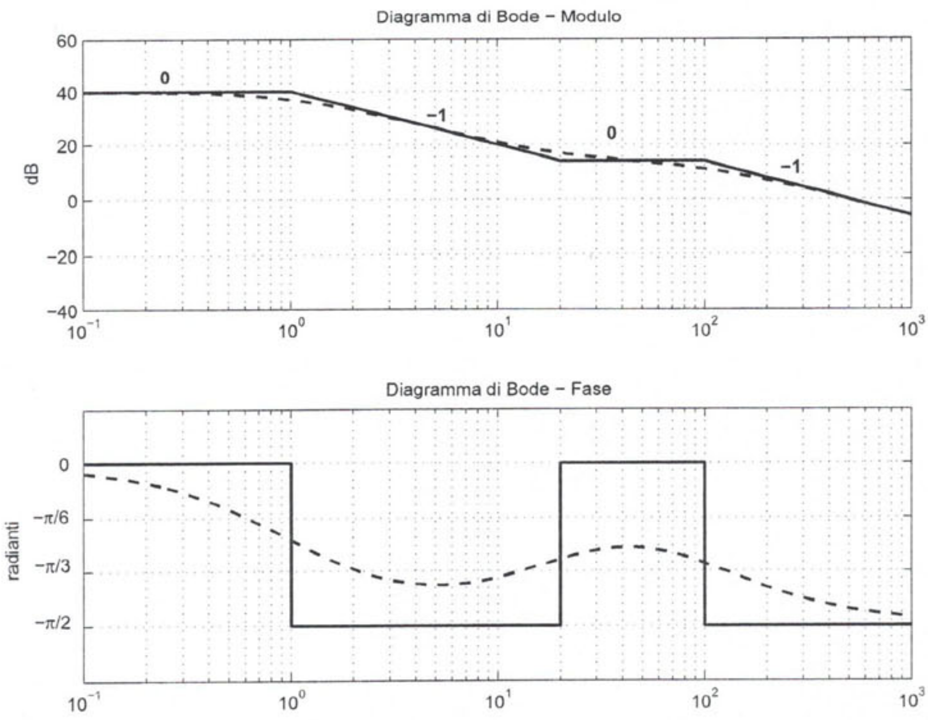
$$\varphi_c = -90° - \omega_c T\frac{180}{\pi} - 2\,atan\left(\frac{\omega_c}{10}\right) + atan\left(\frac{\omega_c}{100}\right) > -180°$$

APPROSSIMANDO A $-90° - \omega_c T\frac{180}{\pi} > -180°$

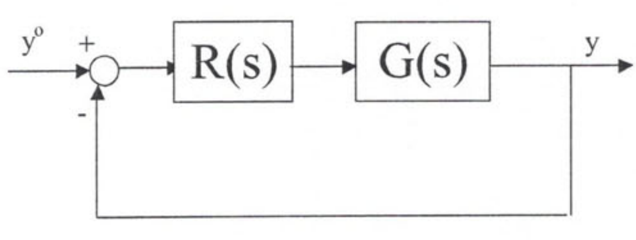
$T < 5 \cdot \pi$ udt

PRECISAMENTE $T < 15{,}52$ udt

**3.** In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare senza autovalori nascosti.




Si supponga di retroazionare il sistema secondo lo schema in figura.



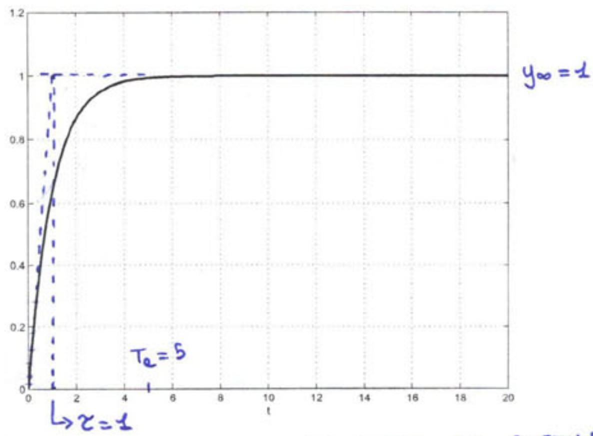

3.1 Determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ di un regolatore PI in modo che la risposta del sistema retroazionato a $y^o(t) = sca(t)$ sia simile a quella tracciata in figura.

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = \mu_R \frac{1+s\tau}{s}$$

$$G(s) = 100 \cdot \frac{(1 + s/20)}{(1+s)(1+s/100)}$$

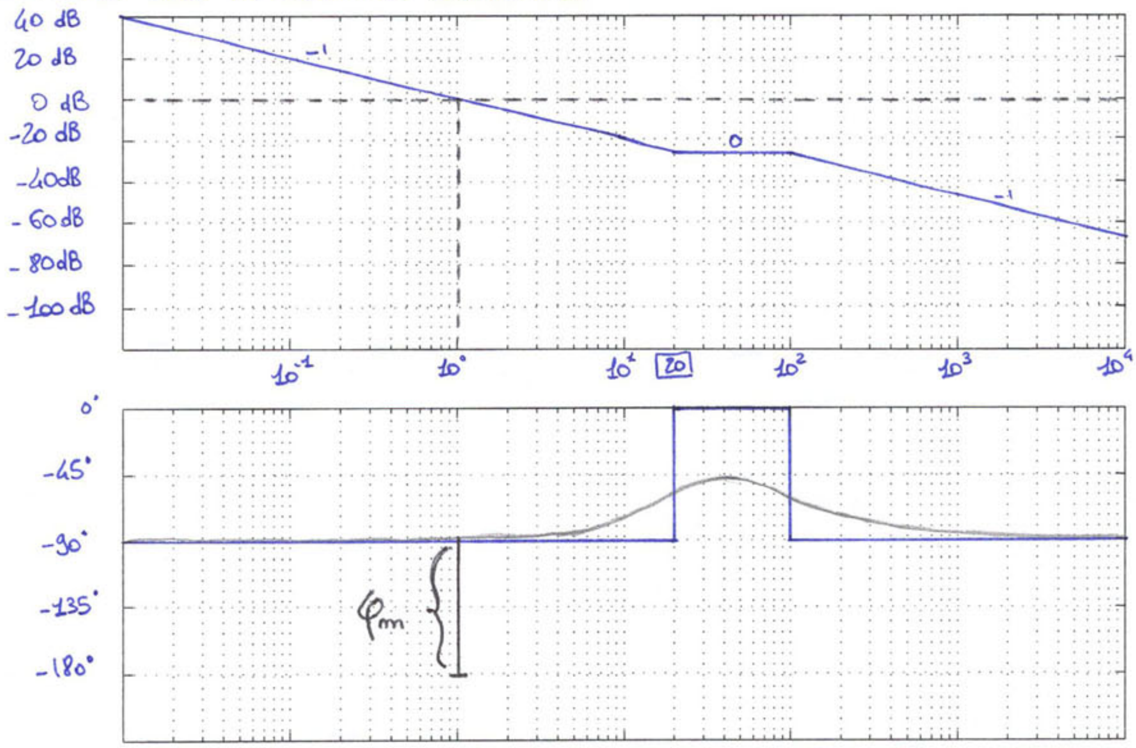
TRADUZIONE DELLE SPECIFICHE: - $T_a \cong 5$ udt $\Rightarrow \omega_c \cong 1$ rad/s
- $e_\infty = 0$ QUANDO $y^\circ(t) = sca(t)$
- RISPOSTA A SINGOLO POLO (NON OSCILLANTE) $\Rightarrow \varphi_m > 60°$

⌜PROGETTO STATICO⌟: PER GARANTIRE $e_\infty = 0$ É SUFFICIENTE LA PRESENZA DELL' INTEGRATORE CHE É GIÁ COMPRESO NEL REGOLATORE PI




⌜PROGETTO DINAMICO⌟:

SUPPONENDO DI PORRE $\tau = 0$ $R(s) = \frac{\mu_R}{s}$, $\mu_R$ CI PERMETTE DI PORTARE LA $\omega_c$ A 1 rad/s, MA NON INFLUENZA IL DIAGRAMMA DELLA FASE CHE CON L'AGGIUNTA DELL' INTEGRATORE SCENDE DI 90° $\Rightarrow \measuredangle L(j\omega_c) = \measuredangle L(j1) \cong -135° \Rightarrow \varphi_m < 60°$




A QUESTO PUNTO SIAMO OBBLIGATI A INTRODURRE UN $\tau \neq 0$ E QUESTO CI PERMETTE DI CANCELLARE IL POLO DI $G(s)$ IN $\omega = 1$ rad/s PONENDO $\tau = 1$

$$R(s) = \mu_R \cdot \frac{1+s}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{100\mu_R}{s} \frac{1+s/20}{1+s/100} \quad \text{se } \omega_c = 1 \quad |L(j\omega_c)| = \frac{100\mu_R}{|j1|} \cdot \frac{|1+j\frac{1}{20}|}{|1+j\frac{1}{100}|} \approx 100\mu_R = 1$$

$$\Rightarrow \mu_R = 0{,}01$$

$$R(s) = 0{,}01 \frac{1+s}{s} \Rightarrow L(s) = \frac{1+s/20}{s(1+s/100)}$$

$$\varphi_m = 180° - \left|-90° - \arctan\left(\frac{1}{100}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right)\right| \cong 92{,}3° > 60° \Rightarrow \text{OK}$$

TUTTE LE SPECIFICHE SONO STATE RISPETTATE

3.2 Si supponga che l'ingresso di controllo saturi quando raggiunge il valore 100 in modulo. Si disegni lo schema con cui viene realizzata l'azione integrale del regolatore PI per evitare il fenomeno del wind-up.

FARE RIFERIMENTO
AL LIBRO DI TESTO

**4.** Con riferimento all'esercitazione sperimentale svolta in laboratorio, descrivere brevemente il problema di controllo affrontato, specificando variabili di controllo e controllate, e disturbi.

FARE RIFERIMENTO ALLE
SLIDE DI LABORATORIO