1. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1^2(t) - 3x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

1.1 Determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita del sistema associato alla condizione iniziale $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$, e all'ingresso $u(t) = 3$, $t \geq 0$.

$$\dot{X}_1 = -2X_1 \quad , \quad X_1(0) = 1 \longrightarrow X_1(t) = e^{-2t}, \; t \geq 0$$

$$\dot{X}_2 = -3X_2 + v$$

$$v := u + X_1^2$$

$$X_2(0) = 1$$

$$v(t) = 3 + e^{-4t}$$

$$X_2(t) = e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cdot (3 + e^{-4\tau}) d\tau$$

$$= e^{-3t} + e^{-3t} \int_0^t (3e^{3\tau} + e^{-\tau}) d\tau$$

$$= e^{-3t} + e^{-3t} \left[e^{3\tau} - e^{-\tau} \right]_0^t$$

$$= e^{-3t} + e^{-3t} (e^{3t} - e^{-t} \cancel{-1+1})$$

$$= e^{-3t} + 1 - e^{-4t}, \; t \geq 0$$

$$y(t) = 1 + e^{-3t} - e^{-4t}, \; t \geq 0$$

1.2 Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = 3$, $t \geq 0$.

$$\begin{cases} -2\bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_1^2 - 3\bar{x}_2 + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = 1$$

STATO DI EQUILIBRIO — USCITA DI EQUILIBRIO

1.3 Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio calcolato al punto precedente.

$$A = \left.\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2\bar{x}_1 & -3 \end{bmatrix}\right|_{\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{u} = 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

MATRICE DINAMICA DEL SISTEMA LINEARIZZATO ATTORNO ALL'EQUILIBRIO $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 3$

$\lambda_1 = -2 < 0$

$\lambda_2 = -3 < 0$

ENTRAMBI GLI AUTOVALORI DI A SONO (A PARTE REALE) < 0

$\Longrightarrow$ STATO DI EQUILIBRIO A.S.

1.4 Dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti andamenti rappresenta il movimento dell'uscita del sistema associato all'ingresso $u(t) = 3$, $t \geq 0$ e alla condizione iniziale $x_1(0) = \bar{x}_1 + 1$ e $x_2(0) = \bar{x}_2$, dove $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è lo stato di equilibrio calcolato al punto 1.2 .

$x_1(0) = 1$

$x_2(0) = 1$

$u(t) = 3$, $t \geq 0$

$\longrightarrow$ $y(t) = 1 + e^{-3t} - e^{-2t}$, $t \geq 0$

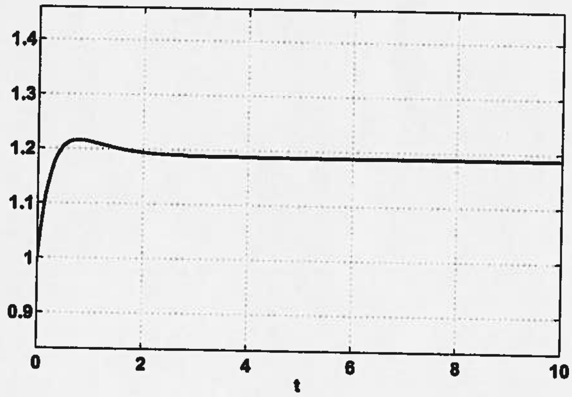
(ESPRESSIONE CALCOLATA AL PUNTO 1.1)

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1 \longrightarrow \text{ESCLUDO (a)}$$

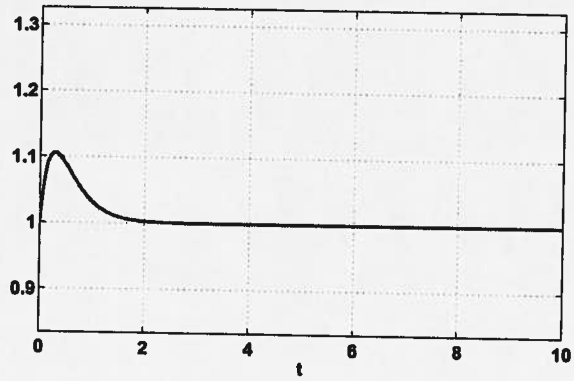
$y(t)$ NON PRESENTA CONTRIBUTI DI TIPO SINUSOIDALE SMORZATO

$\longrightarrow$ ESCLUDO (c)

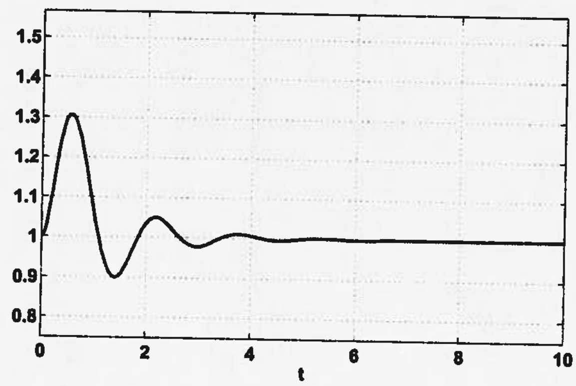
IL GRAFICO CORRETTO È QUELLO DELLA FIGURA (b)



(a)



(b)



(c)

2. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$\ddot{y}(t) = -10\dot{y}(t) + u(t)$$

Essa descrive l'andamento della posizione $y(t)$ di un carrello di massa $m = 1$ che si muove lungo una guida rettilinea soggetto ad una forza motrice $u(t)$, in presenza della forza di attrito $F_a(t) = 10\dot{y}(t)$.

2.1 Verificare che la funzione di trasferimento del sistema carrello con ingresso u ed uscita y è $G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$. E' possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi di $G(s)$?

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)](s) = \mathcal{L}[-10\dot{y}(t) + u(t)](s)$$

$$s\,\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\dot{y}(0)} = -10\,\mathcal{L}[\dot{y}(t)](s) + \mathcal{L}[u(t)](s)$$

0 (C.I. NULLE) ← 0

$$s\left(s\,\mathcal{L}[y(t)](s) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{y(0)}\right) = -10\left(s\,\mathcal{L}[y(t)](s) - \underset{\overset{\parallel}{0}}{y(0)}\right) + U(s)$$

$$s^2 Y(s) + 10 s Y(s) = U(s) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+10)} U(s)$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

IL SISTEMA È DI ORDINE 2 → I POLI $p_1 = 0$ E $p_2 = -10$ SONO TUTTI E SOLI GLI AUTOVALORI

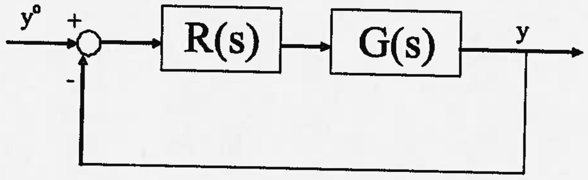
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = -10$ → STABILITÀ SEMPLICE

2.2 Determinare l'espressione analitica della risposta forzata all'ingresso $u(t) = 1 + 10t$, $t \geq 0$, del sistema carrello con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$.

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{10}{s^2} = \frac{s+10}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\cancel{(s+10)}} \cdot \frac{\cancel{s+10}}{s^2} = \frac{1}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{t^2}{2},\ t\geq 0$$

2.3 Il sistema carrello con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$ viene inserito nello schema in figura, dove $R(s) = k$ è la funzione di trasferimento di un sistema lineare statico di guadagno $k \in \Re$.



Dire, motivando la risposta, se è possibile scegliere k in modo che il sistema retroazionato con ingresso $y°$ ed uscita y sia asintoticamente stabile.

CALCOLIAMO LA F.D.T. DEL SISTEMA RETROAZIONATO :

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+10)}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}}$$

$$= \frac{K}{s^2 + 10s + K}$$

IL SISTEMA RETROAZIONATO È DI ORDINE 2 .
AFFINCHÉ SIA A.S. I POLI DI $F(s)$ DEVONO

ESSERE ENTRAMBI A PARTE REALE NEGATIVA.
C.N.S. AFFINCHÉ $s^2+10s+K$ ABBIA RADICI CON PARTE REALE <0 È CHE

$$K>0$$

$\longrightarrow$ SISTEMA RETROAZIONATO A.S. $\forall K>0$

3. Si consideri il sistrema lineare di ordine 2 con funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+9)}$$

3.1 Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema all'ingresso $u(t) = 2 + sen(0.1t)$, $t \geq 0$. In quanto tempo l'uscita del sistema si assesta alla risposta di regime calcolata?

$u_1(t) = 2 \quad , \quad t \geq 0$

$u_2(t) = sen(0{,}1t) \quad , \quad t \geq 0$

$$y_{1,\infty}(t) = 2 \cdot G_1(0) = \frac{20}{9}$$

$$y_{2,\infty}(t) = |G_1(i \cdot 0{,}1)| \, sen(0{,}1t + \measuredangle G_1(i \cdot 0{,}1))$$

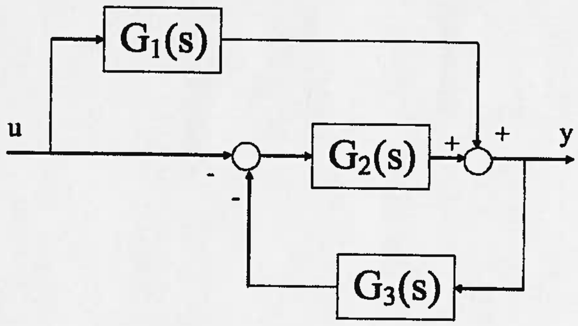
$$G_1(s) = \frac{\frac{10}{9}}{(1+s)(1+\frac{s}{9})}$$

$$|G_1(i \cdot 0{,}1)| = \frac{\frac{10}{9}}{\sqrt{1+0{,}1^2}\,\sqrt{1+\left(\frac{0{,}1}{9}\right)^2}} \simeq \frac{10}{9}$$

$$\measuredangle G_1(i \cdot 0{,}1) = \measuredangle \frac{10}{9} - \measuredangle(1+i \cdot 0{,}1) - \measuredangle\left(1 + i \cdot \frac{0{,}1}{9}\right) \simeq -0{,}11$$

$y_\infty(t) \simeq \frac{20}{9} + \frac{10}{9} sen(0{,}1t - 0{,}11)$ $\quad T_a \simeq 5 \cdot 1 = 5$ UNITÀ DI TEMPO

3.2 Il sistema con funzione di trasferimento $G_1(s)$ viene inserito nello schema in figura, dove $G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono le funzioni di trasferimento di due sistemi lineari.



(a) Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y in termini di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_2(s)G_3(s)} - \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}$$

(b) Dire, motivando la risposta, se la presenza di un polo pari a 3 nella funzione di trasferimento $G_2(s)$ è condizione sufficiente per concludere che il sistema con ingresso u ed uscita y è instabile.

FALSO. IL SISTEMA CON F.D.T. $G_2(s)$ È RETROAZIONATO, I SUOI AUTOVALORI (TRA CUI $\lambda = 3$) NON SONO NECESSARIAMENTE ANCHE AUTOVALORI DEL SISTEMA CON INGRESSO u ED USCITA y.