1. Si consideri il sistema con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2\beta x_1(t) + x_2^2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned} \tag{1}$$

dove β è un parametro reale non nullo ($\beta \neq 0$).

1.1 Determinare stato e uscita di equilibrio $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e $\bar{y}$ associati all'ingresso costante $u(t) = 2$, $t \geq 0$.

ALL'EQUILIBRIO $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} 0 = -2\beta\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ 0 = -\bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases}$ $\longrightarrow \bar{x}_2 = \bar{u} = 2$

$\bar{x}_1 = \dfrac{\bar{x}_2^2}{2\beta} = \dfrac{4}{2\beta} = 2/\beta$

$\bar{y} = \bar{x}_1 = 2/\beta$

PUNTO DI EQUILIBRIO
$\bar{u} = 2$
$\bar{x}_1 = 2/\beta$
$\bar{x}_2 = 2$
$\bar{y} = 2/\beta$

1.2 Dopo avere scritto le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ determinato al punto precedente, dire per quali valori del parametro β ($\beta \neq 0$) lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

$$\delta S: \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -2\beta\,\delta x_1 + 2\bar{x}_2\,\delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -\delta x_2 + \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

$\delta x_1 = x_1(t) - \bar{x}_1$ $\quad \delta u = u(t) - \bar{u}$
$\delta x_2 = x_2(t) - \bar{x}_2$ $\quad \delta y = y(t) - \bar{y}$

$$A = \begin{bmatrix} -2\beta & 2\bar{x}_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ (TRIANGOLARE)

AUTOVALORI

$\lambda_1 = -2\beta \qquad \lambda_2 = -1$

PERCHÉ L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA ORIGINARIO SIA ASINTOTICAMENTE STABILE, TUTTI GLI AUTOVALORI DEL MODELLO LINEARE TANGENTE DEVONO AVERE PARTE REALE <u>STRETTAMENTE</u> NEGATIVA!

$\Rightarrow -2\beta < 0 \quad \Rightarrow \boxed{\beta > 0}$

1.3 Posto $\beta = 1$, determinare l'espressione analitica del movimento dell'uscita associato all'ingresso costante $u(t) = 2$, $t \geq 0$, e alla condizione iniziale $x_1(0) = 1.9$ e $x_2(0) = 2$. A quale valore tende asintoticamente l'uscita? Giustificare il risultato ottenuto.

LE DUE EQUAZIONI DINAMICHE DEL SISTEMA SONO DISACCOPPIATE, PERTANTO PER CALCOLARE $x_2(t)$ BASTA CONOSCERE $u(t)$ E PER CALCOLARE $x_1(t)$ BASTA CONOSCERE $x_2(t)$ CALCOLATO IN PRECEDENZA

$\dot{x}_2 = -x_2 + u$

INIZIALIZZATA CON $x_2(0) = 2$, x_2 È ALL'EQUILIBRIO QUINDI CI ASPETTIAMO CHE $x_2(t) = 2 \quad t \geq 0$

VERIFICHIAMO APPLICANDO LAGRANGE

$$x_2(t) = e^{-t} x_2(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 2 \, d\tau = e^{-t} x_2(0) + 2 \left[e^{-(t-\tau)} \right]_0^t = e^{-t} x_2(0) + 2(1 - e^{-t}) =$$

$$= 2 - (2 - x_2(0)) e^{-t} = 2 \qquad t \geq 0 \qquad \text{(COME PREVISTO)}$$

$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^2$

INIZIALIZZATA CON $x_1(0) = 1{,}9$, x_1 È VICINO ALL'EQUILIBRIO $\bar{x}_1 = 2$ A CUI, ESSENDO ASINTOTICAMENTE STABILE (VEDI PUNTO 1.2), x_1 TENDE. CI ASPETTIAMO UNA RISPOSTA ESPONENZIALE PERCHÉ L'EQUAZIONE È FORZATA DA $x_2^2(t)$, CHE È COSTANTE, E LA DINAMICA È LINEARE (IN x_1)

APPLICHIAMO LAGRANGE PER OTTENERE L'ESPRESSIONE ANALITICA

$$x_1(t) = e^{-2t} x_1(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot x_2^2(\tau) d\tau = e^{-2t} x_1(0) + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 4 \, d\tau =$$

$$= e^{-2t} x_1(0) + \cancel{4}^{\,2} \left[\frac{e^{-2(t-\tau)}}{\cancel{2}} \right]_0^t = e^{-2t} x_1(0) + 2(1 - e^{-2t}) = 2 - (2 - x_1(0)) e^{-2t} =$$

$$= 2 - 0{,}1 e^{-2t} \qquad t \geq 0 \qquad \text{(COME PREVISTO)}$$

INFINE $y(t) = x_1(t) = 2 - 0{,}1 e^{-2t} \quad t \geq 0$

2. Si consideri il sistema lineare con ingresso u ed uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 6x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 37x_1(t) \end{cases}$$

2.1 Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema. E' possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema dall'analisi di $G(s)$?

APPLICANDO LA DEFINIZIONE

$$sI-A = \begin{bmatrix} s+1 & -6 \\ +6 & s+1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 37 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 37 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & +6 \\ -6 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+2s+37} = \frac{\begin{bmatrix} 37 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ s+1 \end{bmatrix}}{s^2+2s+37} = \frac{222}{s^2+2s+37}$$

LA $G(s)$ HA DUE POLI COMPLESSI CONIUGATI CON PARTE REALE NEGATIVA E IL SISTEMA È DEL II ORDINE $\Rightarrow$ OK ASINTOTICA STABILITÀ DALL'ANALISI DELLA $G(s)$

2.2 Calcolare il valore iniziale $y(0)$, la derivata iniziale $\dot{y}(0)$, ed il valore asintotico y_∞ della risposta forzata del sistema allo scalino unitario $u(t) = sca(t)$.

USIAMO IL TEOREMA DEL VALORE INIZIALE/FINALE

$$U(s) = \frac{1}{s} \qquad G(s) = \frac{222}{s^2+2s+37} \qquad Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

TVI: $$y(0) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to +\infty} \cancel{s} \cdot \frac{222}{s^2+2s+37} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 0$$

TVI: $$\dot{y}(0) = \lim_{s \to +\infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \to +\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \to +\infty} s^2 \cdot \frac{222}{s^2+2s+37} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 0$$

TVF: $$y_\infty = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{222}{s^2+2s+37} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = 6$$

$\hookrightarrow$ POSSO USARLO PERCHÉ AS. STABILE

2.3 Tracciare l'andamento qualitativo della risposta forzata del sistema allo scalino unitario $u(t) = sca(t)$. Specificare nel grafico valore iniziale $y(0)$, valore asintotico y_∞, e tempo di assestamento. Come cambierebbero valore iniziale $y(0)$, valore asintotico y_∞, e tempo di assestamento se si considerasse la condizione iniziale $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 1$ invece di $x_1(0) = x_2(0) = 0$?

POLI : $\lambda_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4-37\cdot 4}}{2} = \frac{-\cancel{2} \mp \cancel{2}\sqrt{-36}}{\cancel{2}} = -1 \mp 6i$

$\omega_n = \sqrt{1^2+6^2} = 6{,}08$ rad/s

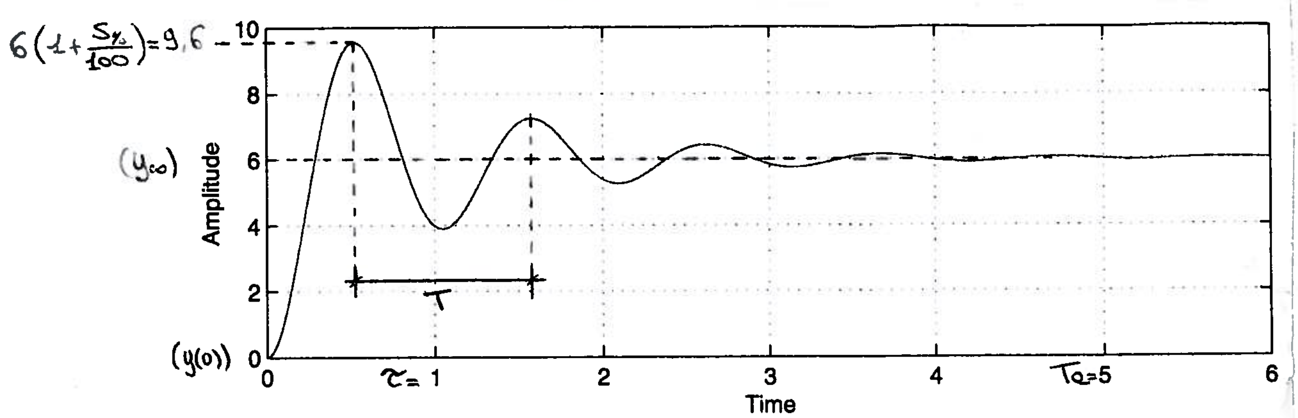
$\xi = \frac{Re}{\omega_n} = \frac{1}{\omega_n} = 0{,}16$ (POCO SMORZATO)

$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = 1$ udt

$S_\% = 100\, e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong 60\%$

$T_a = 5 \cdot \frac{1}{\xi\omega_n} = 5$ udt

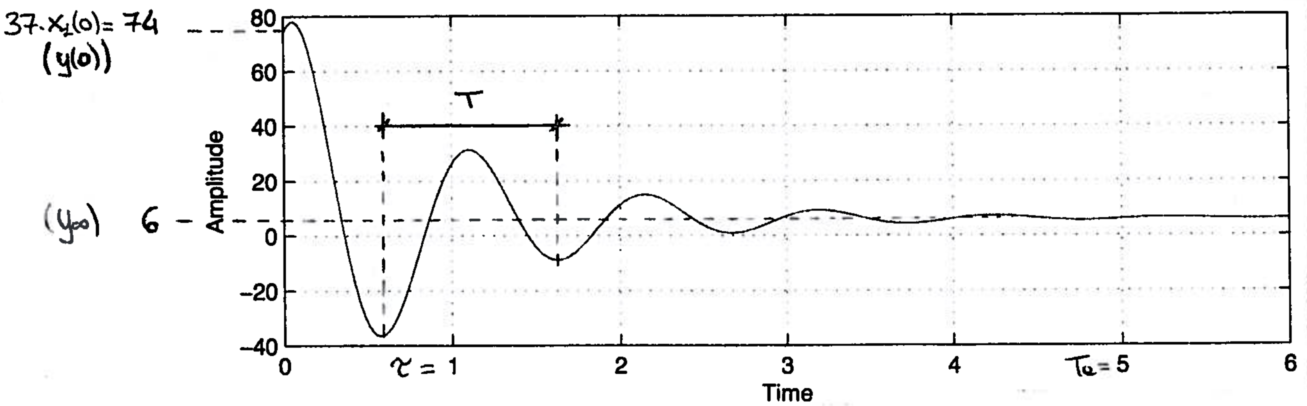
$T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \cong 1{,}05$ udt



$x_1(0) = 0$

$x_2(0) = 0$

$\Rightarrow y(0) = 0$



$x_1(0) = 2$

$x_2(0) = 1$

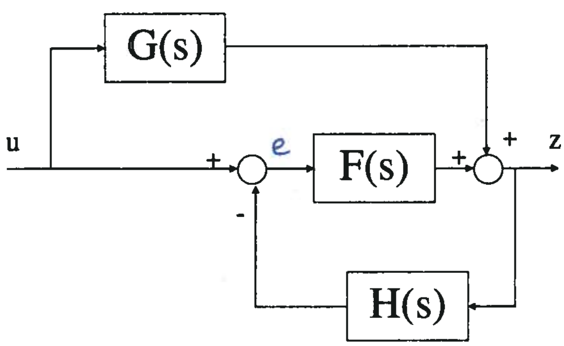
$y(0) = 2 \cdot 37 = 74$

$\dot{y}(0) = \dot{x}_1(0) =$

$= -x_1(0) + 6x_2(0) =$

$= -2 + 6 = +4 >$

2.4 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene inserito nello schema in figura, dove $F(s)$ e $H(s)$ sono le funzioni di trasferimento di due sistemi lineari.



Scrivere l'espressione della funzione di trasferimento $V(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita z in termini di $G(s)$, $F(s)$, e $H(s)$.

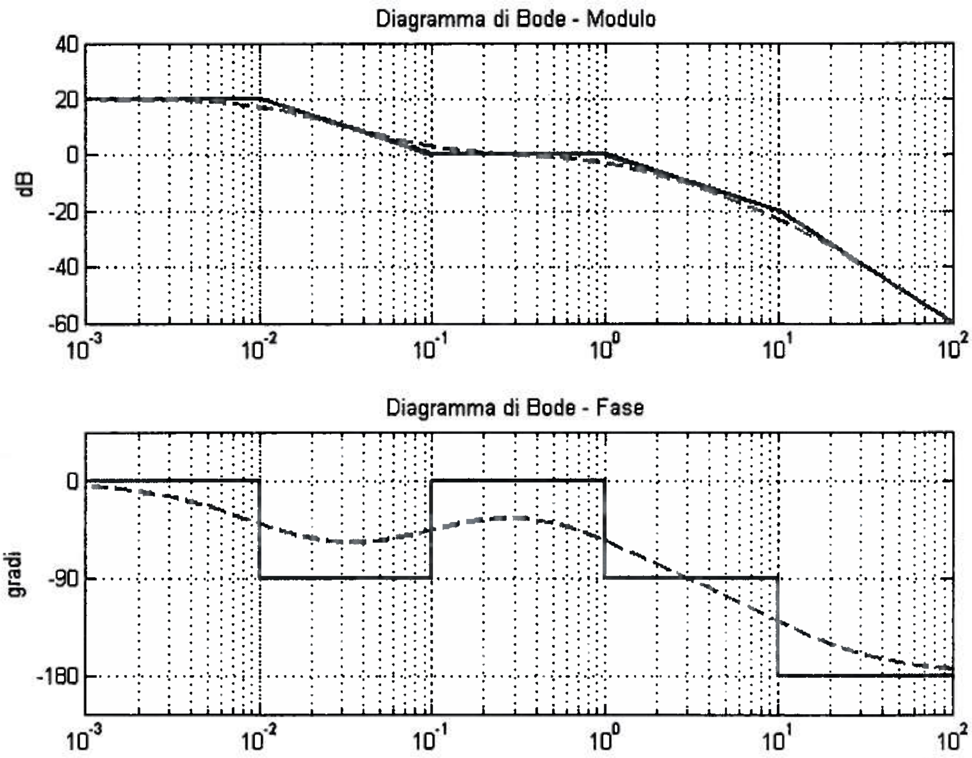
DEFINIAMO IL SEGNALE e COME SEGNATO NELLA FIGURA A PAGINA PRECEDENTE

$E(s) = U(s) - H(s)Z(s)$ INOLTRE $Z(s) = F(s)E(s) + G(s)U(s)$

SOSTITUENDO SI OTTIENE $Z(s) = F(s)U(s) - F(s)H(s)Z(s) + G(s)U(s)$

$$V(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{F(s) + G(s)}{1 + F(s)H(s)}$$

4. In figura sono riportati i diagrammi di Bode (esatti e approssimati) del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare senza autovalori nascosti.



4.1 Dire, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) il sistema è asintoticamente stabile.

IN $\omega = 10^{-2}$ C'È UN CAMBIO DI PENDENZA DI -1 E UNO SFASAMENTO DI $-90°$

$\Rightarrow$ POLO NEL SEMIPIANO SINISTRO

IN $\omega = 10^{-1}$ $\left.\begin{array}{ll} \Delta \text{PENDENZA} & +1 \\ \Delta \text{FASE} & +90° \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ ZERO SINISTRO

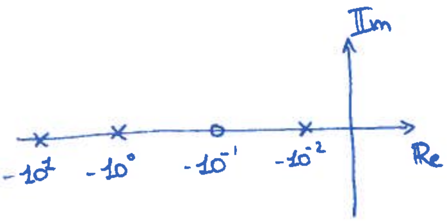
IN $\omega = 10^{0}$ $\left.\begin{array}{ll} \Delta \text{PENDENZA} & -1 \\ \Delta \text{FASE} & -90° \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ POLO SINISTRO

IN $\omega = 10^{1}$ $\left.\begin{array}{ll} \Delta \text{PENDENZA} & -1 \\ \Delta \text{FASE} & -90° \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ POLO SINISTRO

3 POLI CON $Re < 0$
NESSUN AUTOVALORE NASCOSTO $\Rightarrow$ AS. STABILE $\Rightarrow$ VERO

b) la risposta forzata del sistema ad un ingresso a scalino presenta una sovraelongazione.

GUARDIAMO LA POSIZIONE RECIPROCA TRA POLI E ZERI



LO ZERO È TRA IL POLO DOMINANTE E IL SUCCESSIVO QUINDI NON CAUSA SOVRAELONGAZIONE

$\Rightarrow$ FALSO

c) la risposta forzata del sistema all'ingresso $u(t) = 2$, $t \geq 0$, si assesta in circa 500 unità di tempo al valore 10.

IL POLO DOMINANTE È $\lambda = -10^{-2}$ CHE CORRISPONDE AD UNA $\tau = 100$ udt

QUINDI IL TEMPO DI ASSESTAMENTO È CORRETTO, MA IL VALORE A CUI SI ASSESTA LA RISPOSTA È DATO DAL PRODOTTO TRA L'AMPIEZZA DELLO SCALINO E IL GUADAGNO STATICO DEL SISTEMA

$\Rightarrow y_\infty = G(0) \cdot 2 = 20\text{dB} \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \neq 10$ $\Rightarrow$ FALSO

d) segnali sinusoidali in ingresso al sistema con pulsazione $\omega > 10$ vengono attenuati di un fattore pari ad almeno 10.

DA $\omega = 10$ IN POI IL DIAGRAMMA DEL MODULO DELLA $G(s)$ STA SOTTO I $-20\,dB$, CIOÉ

$$|G(i\omega)| < -20dB = \frac{1}{10} \quad \forall \omega > 10$$

$\Rightarrow$ L'ATTENUAZIONE È ALMENO DI UN FATTORE 10 $\Rightarrow$ VERO

4.2 Scrivere l'espressione analitica della risposta di regime all'ingresso $u(t) = 2 + sen(10^{-3}t) + 2sen(10^{-1}t)$.

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE CAUSE E DEGLI EFFETTI POSSIAMO CONSIDERARE I CONTRIBUTI DELL'INGRESSO SEPARATAMENTE E CALCOLARE LA RISPOSTA DI REGIME DI OGNI CONTRIBUTO

① $u(t) = 2$ $\qquad y(t) = G(0)\cdot 2 = 20dB \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$

② $u(t) = sen(10^{-3}t)$ $\qquad$ PER $\omega = 10^{-3}$ $\quad |G(i\omega)| \cong 20dB$ E $\measuredangle G(i\omega) \cong 0$

$$\Rightarrow y(t) = |G(i10^{-3})| sen(10^{-3}t + \measuredangle G(i10^{-3})) \cong 10\, sen(10^{-3}t + 0)$$

③ $u(t) = 2sen(10^{-1}t)$ $\qquad$ PER $\omega = 10^{-1}$ SIAMO ESATTAMENTE SULLO ZERO E DATO CHE GLI ALTRI POLI SONO DISTANTI ALMENO UNA DECADE (IN QUESTO CASO PROPRIO UNA DECADE) ALLORA POSSIAMO DIRE CHE: $\quad |G(i\omega)| \cong 3dB$ E $\measuredangle G(i\omega) \cong -45°$

$$\Rightarrow y(t) = 2|G(i10^{-1})| sen(10^{-1}t + \measuredangle G(i10^{-1})) \cong 2\sqrt{2}\, sen(10^{-1}t - \pi/4)$$

APPLICANDO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE CAUSE E DEGLI EFFETTI OTTENIAMO

$$y(t) = 20 + 10\, sen(10^{-3}t) + 2\sqrt{2}\, sen(10^{-1}t - \pi/4)$$

Formule: $\quad S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$