Soluzione dell'appello del 16 luglio 2012

**1.** Si consideri il sistema lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 10x_2 + 10u\\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

1.1 Trovare le condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$ tali che il movimento libero dell'uscita $y_l(t)$ ad esse associato tende a zero in circa 0.5 unità di tempo.

Il movimento libero dello stato è dato da:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}x_{1,0}\\ x_2(t) &= e^{-10t}x_{2,0} + \int_0^t e^{-10(t-\tau)}e^{-\tau}x_{1,0}d\tau = e^{-10t}x_{2,0} + \frac{1}{9}(e^{-t} - e^{-10t})x_{1,0}\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$y_l(t) = e^{-t}x_{1,0} + e^{-10t}x_{2,0} + \frac{1}{9}(e^{-t} - e^{-10t})x_{1,0}$$

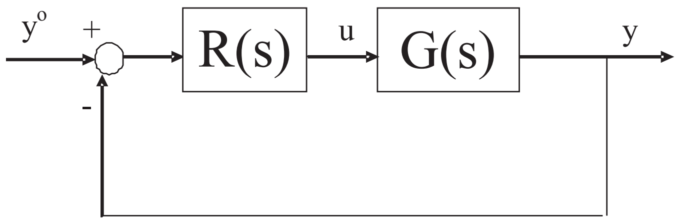
Affinchè il movimento libero dell'uscita si esaurisca in circa 0.5 unità di tempo bisogna quindi porre $x_{1,0} = 0$.

1.2 Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire se è possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema sulla base della sola funzione di trasferimento $G(s)$.

$$G(s) = \frac{10}{s+10}$$

Non è possibile valutare le proprietà di stabilità del sistema sulla base della sola funzione di trasferimento $G(s)$ perchè il sistema ha ordine 2 e $G(s)$ presenta un solo polo reale negativo. Uno degli autovalori è quindi nascosto ed è necessario conoscere il segno della sua parte reale.

1.3 Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ viene retroazionato secondo lo schema classico di controllo in figura.




Determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

i) se $y^\circ(t) = sca(t)$, allora $y(t)$ si assesta ad 1 in 0.5 unità di tempo senza oscillazioni ripetute;

ii) il regolatore ha ordine minimo compatibilmente con il requisito i).

Osserviamo innanzitutto che il problema di controllo è ben posto perchè l'autovalore nascosto del sistema da controllare è pari a -1 e quindi è a parte reale strettamente negativa.

Traducendo il requisito i) in condizioni sulla funzione di trasferimento ad anello aperto $L(s) = G(s)R(s)$, abbiamo che
1) il tipo di $L(s)$ è $\geq 1$ (errore a transitorio nullo a fronte di un segnale di riferimento costante)
2) il margine di fase deve essere $\geq 60°$ (assenza di oscillazioni)
3) la pulsazione critica è pari a 10 (il tempo di assestamento è dato da $5/\omega_c$)

$$R(s) = 10\frac{1+0.1s}{s}$$

1.4 Determinare l'espressione analitica della risposta di regime del sistema di controllo progettato al punto 1.3 all'ingresso $y°(t) = 1 + sen(0.1t)$.

$$y_\infty(t) = F(0) + |F(i0.1)|sen(0.1t + \arg F(i0.1))$$

dove $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ è la funzione di sensitività complementare.
Dato che $F(0) = 1$ e $L(i0.1) \simeq \frac{10}{i0.1}$ (e quindi $|L(i0.1)| = 100 >> 1$) si ha che

$$y_\infty(t) \simeq 1 + sen(0.1t)$$

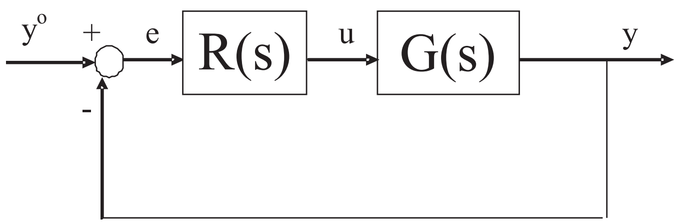
**2.** Si consideri lo schema di controllo in figura dove

$$G(s) = \frac{0.1}{(1+s)^3}$$

è la funzione di trasferimento di un sistema di ordine 3 e

$$R(s) = \mu, \quad \mu > 0$$

è la funzione di trasferimento di un controllore statico.




2.1 Verificare mediante il criterio di Routh-Hurwitz che $\bar{\mu} = 80$ è il valore di $\mu$ per cui il sistema retroazionato in figura è al limite della stabilità, cioè per $0 < \mu < \bar{\mu}$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile e per $\mu > \bar{\mu}$ è instabile.

Gli autovalori del sistema retroazionato sono dati dai poli dell funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}$$

e cioè le radici del polinomio

$$p(s) = (1+s)^3 + 0.1\mu = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 0.1\mu$$

Costruiamo la tabelle di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+0.1\mu & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \\ l_{4,1} & & \end{array}$$

dove

$$l_{3,1} = -\frac{det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1+0.1\mu \end{bmatrix}}{3} = \frac{8-0.1\mu}{3}$$

$$l_{3,2} = 0$$

$$l_{3,1} = -\frac{det \begin{bmatrix} 3 & 1+0.1\mu \\ l_{3,1} & l_{3,2} \end{bmatrix}}{l_{3,1}} = 1+0.1\mu$$

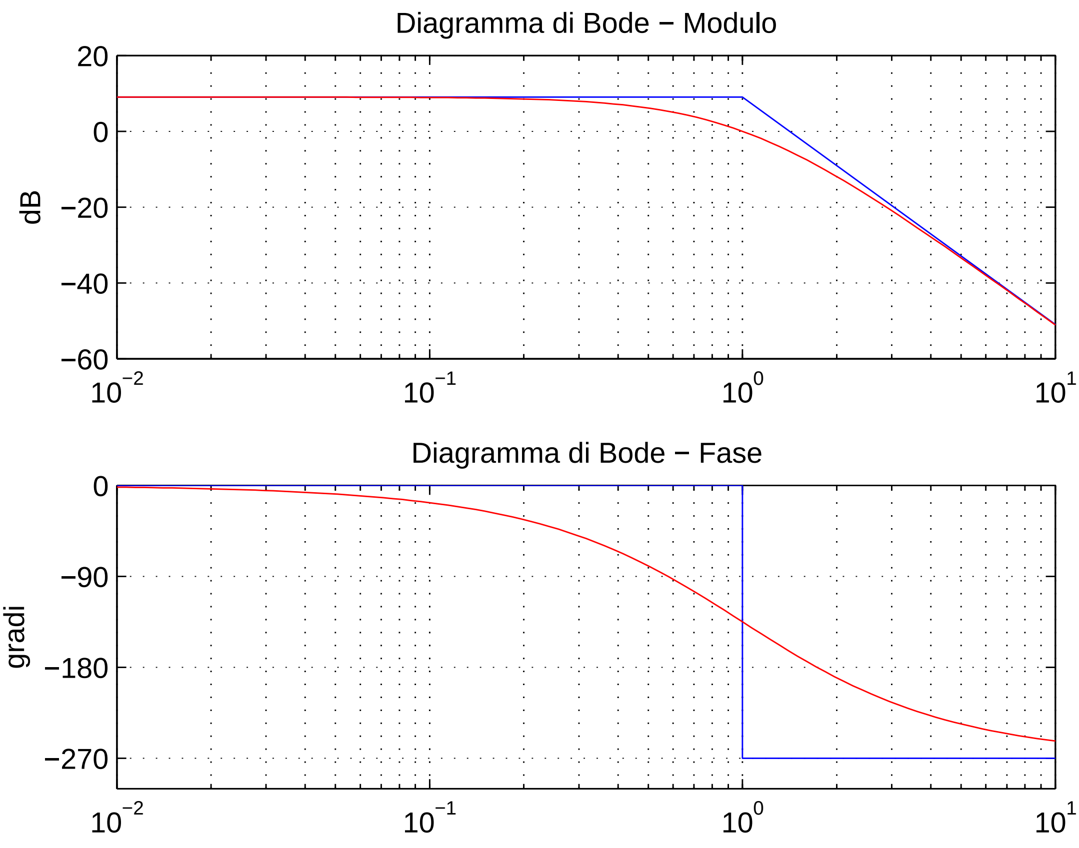
Condizione necessaria e sufficiente affinchè tutte le radici di $p(s)$ siano a parte reale negativa è che

$$\begin{cases} \frac{8-0.1\mu}{3} > 0 \\ 1+0.1\mu > 0 \end{cases}$$

cioè $-10 < \mu < 80$.

Il valore $\bar{\mu}$ cercato è quindi proprio 80.

2.2 Posto $\mu = \frac{\bar{\mu}}{4}\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$, tracciare il diagramma di Bode di $L(s) = R(s)G(s)$ e dire quanto vale la banda passante del sistema retroazionato.



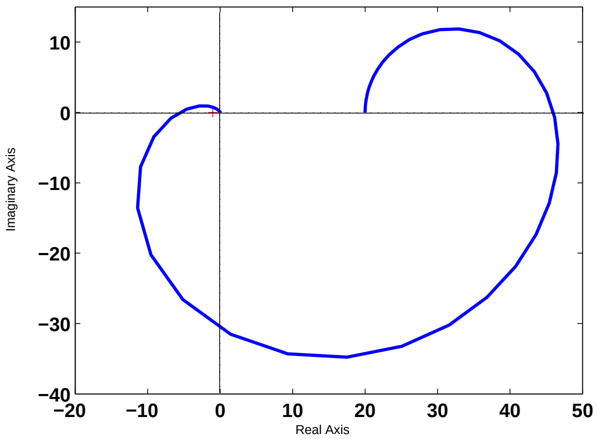

$$L(s) = \frac{2\sqrt{2}}{(1+s)^3}$$

Dato che $\omega_c = 1$, la banda passante può essere approssimata con $[0, 1]$.

2.3 Posto $\mu = \frac{\bar{\mu}}{4}\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$, calcolare quanto valgono a transitorio esaurito i segnali $e(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ indicati nello schema di controllo sopra riportato, quando $y^{\circ}(t) = 10sca(t)$.

$$e_\infty(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+L(s)} \frac{10}{s} = \frac{10}{1+2\sqrt{2}}$$
$$u_\infty(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{R(s)}{1+L(s)} \frac{10}{s} = \frac{200\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$
$$y_\infty(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{L(s)}{1+L(s)} \frac{10}{s} = \frac{20\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

**3.** In figura è rappresentato il diagramma polare della funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile. $G(s)$ ha tutti i poli e gli zeri reali.




3.1 Dire, motivando la risposta, quale delle seguenti espressioni può corrispondere alla funzione di trasferimento $G(s)$, precisando il segno dei parametri reali $\mu$, $T$, $\tau_i$ dell'espressione scelta:

$$(a)\ \mu\frac{1+sT}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$
$$(b)\ \mu\frac{1+sT}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)^2}$$
$$(c)\ \mu\frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$
$$(d)\ \mu\frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)^2}$$
$$(e)\ \frac{\mu}{s}\frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

Dal diagramma polare si osserva che $\mu = 20 > 0$.
Il diagramma inizialmente ha modulo crescente, per cui e' presente uno zero (escludiamo (c), (d), e (e)). Anche la fase è inizialmente crescente, per cui lo zero è negativo ($T > 0$).
Il diagramma polare termina nell'origine del piano complesso con tangente -270°, per cui l'espressione corretta è la (b) con tutte le costanti di tempo dei poli positive, in modo che i 4 poli negativi forniscano un contributo asintotico alla fase di -360° che sommati ai 90° dello zero diano appunto una fase asintotica di -270°.

3.2 All'ingresso $u(t) = sen(\bar{\omega}t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ corrisponde l'uscita di regime $y_\infty(t) = Y sen(\bar{\omega}t + \phi)$. Dire, motivando la risposta, se l'ampiezza $Y$ di $y_\infty(t)$:

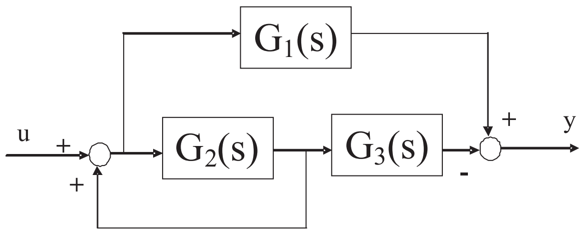
(a) cresce al crescere di $\bar{\omega}$

(b) decresce al crescere di $\bar{\omega}$

(c) dapprima cresce poi decresce all'aumentare di $\bar{\omega}$

La risposta corretta è la (c) perchè $Y = |G(i\bar{\omega})|$ e dal diagramma polare si osserva che $|G(i\bar{\omega})|$ inizialmente cresce e poi descresce.

**4.** Si consideri il sistema con ingresso $u$ ed uscita $y$ in figura, ottenuto mediante interconnessione di tre sistemi lineari con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.




4.1 Dire, giustificandola risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) se $G_3(s)$ ha un polo uguale a 1, allora si può concludere che il sistema con ingresso $u$ ed uscita $y$ è instabile.

Vero. Il sistema con funzione di trasferimento $G_3(s)$ non è retroazionato e quindi i suoi autovalori (tra cui $\lambda = 1$) sono autovalori del sistema interconnesso.

b) se i sistemi con funzione di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$ sono tutti asintoticamente stabili, allora si può concludere che anche il sistema con ingresso $u$ ed uscita $y$ è asintoticamente stabile.

Falso. Il sistema con funzione di trasferimento $G_2(s)$ è retroazionato e quindi i suoi autovalori non sono autovalori del sistema interconnesso, che potrebbe presentare autovalori con parte reale positiva.

4.2 Determinare l'espressione della funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema con ingresso $u$ ed uscita $y$ in funzione di $G_1(s)$, $G_2(s)$, e $G_3(s)$.

$$H(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_2(s)} - \frac{G_3(s)G_2(s)}{1 - G_2(s)}$$

**5.** Con riferimento alle esercitazioni sperimentali di laboratorio, si descriva brevemente il procedimento utilizzato per ricavare modelli matematici del sistema da controllare a partire dalla misura della sua risposta allo scalino.

Si veda il materiale del laboratorio.