Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2004/2005

Università degli Studi di Brescia — Data: 04/04/05

Cognome e nome: .... Numero di matricola: ....

Esercizio 1

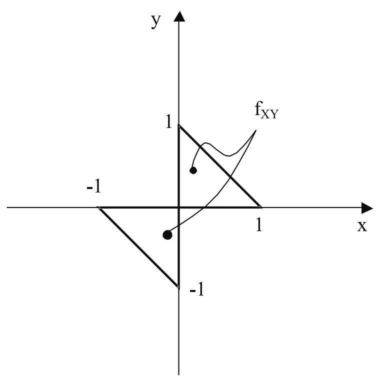
Date 2 urne A e B, l'urna A contenente 1 biglia bianca e 2 nere, e l'urna B 2 biglie bianche e 1 nera, si consideri l'esperimento in cui viene scelta a caso un'urna, e poi viene estratta dall'urna scelta 1 biglia. Si vuole valutare la probabilità che l'urna scelta sia la A sapendo che il risultato dell'esperimento è costituito dall'estrazione di una biglia bianca.

1.1 Si costruisca uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ per descrivere l'esperimento.

1.2 Si calcoli la probabilità suddetta.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = X^4$.



2.1 Determinare la densità di probabilità della variabile Z condizionata all'evento $Y \geq 0$, $f_{Z|Y\geq 0}(z|Y \geq 0)$.

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + Y/Y \geq 0]$;

2.3 Valutare se le variabili casuali Z e X sono incorrelate.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilitá $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, dove $P : \Re \rightarrow [0, 1]$ é la misura di probabilitá definita dalla funzione di densitá su $\Re$: $f(\alpha) = 0.5u_{[0,1]}(\alpha) + 0.5\delta(\alpha)$, $\alpha \in \Re$, con $u_{[0,1]}$ che rappresenta la densità uniforme in $[0, 1]$.

Si consideri la variabile casuale:

$$X_n(s) = \begin{cases} 0, & s > 1/n \\ 1, & s \leq 1/n \end{cases}$$

dove n è un numero intero positivo.

3.1 Calcolare la densità di probabilità di X_n.

3.2 Dire se la successione $\{X_n,\, n = 1, 2, \dots\}$ converge in media quadratica alla variabile Z identicamente nulla definita sullo stesso spazio di probabilitá $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$.

Esercizio 4

Siano $\{X_1(t), t \in \Re\}$ e $\{X_2(t), t \in \Re\}$ due processi stocastici a tempo continuo, gaussiani, bianchi nella banda $[-4, 4]$, con valore atteso 0 e potenza 8. $\{X_1(t), t \in \Re\}$ e $\{X_2(t), t \in \Re\}$ sono indipendenti.
Si consideri il processo $Y(t) = X_1(t) + 2X_2(t)$.

4.1 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

4.2 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(y; t)$.

4.3 Determinare la densità di probabilità congiunta $f_Y(\alpha, \beta; t_1, t_2)$ di $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$.

4.4 Dire se esistono dei valori di t_1 e t_2 tali che $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono i) incorrelate, ii) indipendenti, iii) ortogonali.

Esercizio 5 Si consideri il processo $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k - T)$ dove T è una variabile casuale uniforme in $[0, 1]$, $\{A_k\}$ è una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con densità $f_A(a) = 0.5\delta(a + 2) + 0.5\delta(a - 2)$ e indipendenti da T, e $p(t) = rect(t - 1/2)$.

5.1 Verificare che il processo è stazionario in senso lato.

5.2 Determinare l'espressione della densità spettrale di potenza.

5.3 Dire, motivando la risposta, se il processo è ergodico rispetto al valore medio.

Domande di teoria

D1. Si consideri un processo Y ottenuto mediante una trasformazione tempo invariante algebrica di un processo X: $Y(t) = g(X(t))$, $\forall t$. Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere: (a) se X è gaussiano, allora anche Y è gaussiano, (b) se X è stazionario in senso lato, allora anche Y è stazionario in senso lato.

D2. Si descriva brevemente che cosa si intende per prove bernoulliane, riportandone un esempio.