Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — Data: 05/07/05

Cognome e nome: .... N. di matricola: ....

Esercizio 1

Si consideri l'esperimento in cui viene chiesto a 3 persone di scegliere a caso una carta da un mazzo di 52 carte. Si vuole valutare la probabilità che le 3 persone estraggano una carta dello stesso seme, nell'ipotesi in cui tutte e 3 le persone interpellate effettuino l'estrazione dal mazzo di carte completo.

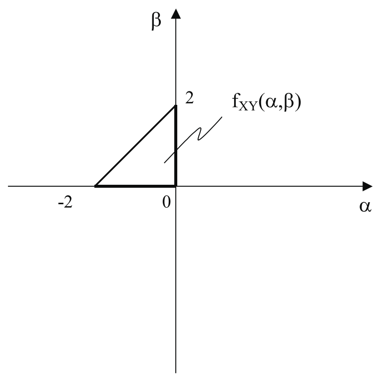
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) dell'esperimento.

1.2 Definire la variabile casuale indicatrice dell'evento di interesse.

1.3 Calcolare la probabilità di interesse.

Esercizio 2

Siano X e Y variabili casuali con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura.



2.1 Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Y|Y+X \leq 0]$.

2.3 Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = Y^2$ condizionata all'evento $Y + X \leq 0$, cioè $f_{Z|Y+X\leq 0}(z|Y+X \leq 0)$.

Esercizio 3

Sia Z una variabile casuale con densità di probabilità uniforme in $[-1, 1]$. Si consideri la successione di variabili casuali $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ definite sullo stesso spazio di probabilità di Z e costruite in base alla seguente procedura iterativa:

$$Y_{n+1} = 0.8 Y_n,$$

inizializzata con $Y_0 = Z$.

Dire, motivando la risposta, se $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ converge in media quadratica alla variabile casuale Y identicamente nulla.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-5, 5]$, a media nulla e potenza $P_X = 10$, e $\{Y(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, e con densità spettrale di potenza triangolare nella banda $[-5, 5]$, a media nulla e potenza $P_Y = 5$.

Si consideri il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ definito da: $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Sotto l'ipotesi che $\{X(t), t \in \Re\}$ e $\{Y(t), t \in \Re\}$ sono indipendenti:

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Z(\alpha; t)$ del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$.

4.2 Determinare la funzione di autocorrelazione $R_Z(t, t + \tau)$ del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$.

4.3 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

4.4 Determinare la densità spettrale di potenza del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$.

4.5 Dire, motivando la risposta, se esistono coppie di istanti di tempo (t_1, t_2) caratterizzate dal fatto che le variabili casuali $Z(t_1)$ ed $Z(t_2)$ sono statisticamente indipendenti.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite con densità di probabilità gaussiana a valore medio nullo e varianza unitaria, e θ una variabile casuale uniforme in $[0, 3]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

Si consideri il processo stocastico a tempo continuo $\{X(t), t \in \Re\}$ definito da $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 3k - \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.

5.1 Determinare il valore atteso $E[X(t)]$ e la funzione di autocorrelazione $R_X(t, t + \tau)$ di $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Domande di teoria

D1. Enunciare e commentare il teorema di Slutsky.

D2. Dare la definizione di processo stocastico a tempo continuo ciclostazionario in senso lato.