Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori Data: 07/01/05

Cognome e nome: .... N. di matricola: ....

Esercizio 1

Data un'urna contenente 4 biglie contrassegnate con i numeri 1, 2, 3, e 4, si consideri l'esperimento in cui vengono estratte contemporaneamente dall'urna 2 biglie.
Si vuole calcolare la probabilità che le biglie estratte siano contrassegnate entrambe con un numero pari.

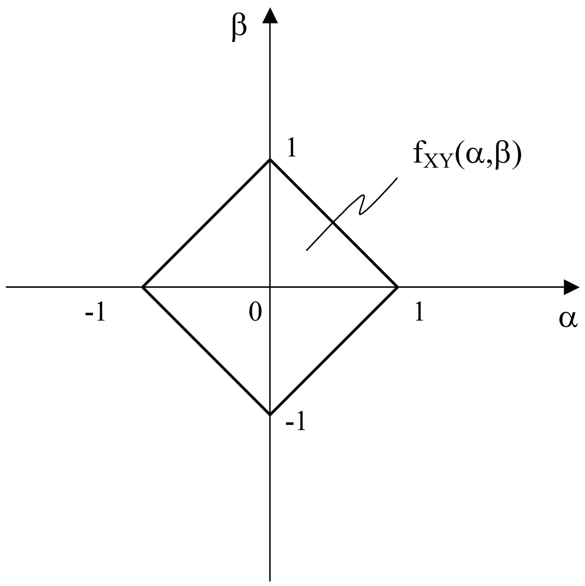
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) dell'esperimento.

1.2 Calcolare la probabilità di interesse.

1.3 Definire la funzione $X : \Omega \to \{0, 1\}$ che associa alla coppia di biglie estratte 1 se i numeri corrispondenti differiscono di 1, e 0 in tutti gli altri casi. Valutare se X è una variabile casuale sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ introdotto.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = Y^3$.



2.1 Determinare la densità di probabilità della variabile casuale Z condizionata all'evento $X \geq 0$, cioè $f_{Z|X\geq 0}(z|X \geq 0)$.

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + X^2|X \geq 0]$;

Esercizio 3

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-2, 2]$, con valore atteso nullo e potenza $P_X = 4$.
Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = X^3(t)$.

3.1 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso stretto.

3.2 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. $\{Y(t), t \in \Re\}$ è un processo gaussiano?

3.3 Determinare la densità di probabilità congiunta $f_Y(\alpha, \beta; t, t + \tau)$ di $Y(t)$ e $Y(t + \tau)$.

3.4 Dire, motivando la risposta, se le variabili casuali $Y(1)$ e $Y(\frac{5}{4})$ sono indipendenti.

3.5 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso lato.

Esercizio 4

Data la successione $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite a valori equiprobabili in $\{-1, 1\}$ e la variabile casuale θ uniforme in $[0, 2]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, si consideri il processo stocastico a tempo continuo $\{X(t), t \in \Re\}$ definito da $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k - \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.

4.1 Disegnare tre realizzazioni del processo $\{X(t), t \in \Re\}$ corrispondenti a diverse realizzazioni di $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ e θ.

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Domande di teoria

D1. Definire le nozioni di convergenza stocastica quasi ovunque, in media quadratica ed in probabilità di una successione di variabili casuali ad una variabile casuale definita sullo stesso spazio di probabilità, e descriverne le implicazioni reciproche.

D2. Dare la definizione di (a) ortogonalità, (b) incorrelazione e (c) indipendenza tra due variabili casuali. Descrivere i legami tra le condizioni (a), (b) e (c).