Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori a.a. 2005/2006

Università degli Studi di Brescia Data: 10/01/06

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

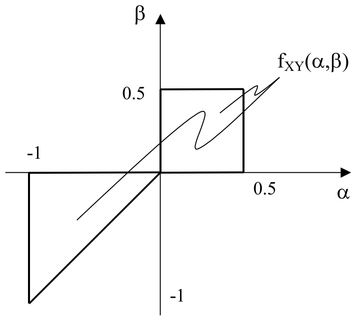
Si consideri l'esperimento in cui viene chiesto a 2 persone di estrarre una carta da un mazzo di 52 carte, 13 carte per ognuno dei quattro semi (cuori, picche, quadri e fiori). Il numero delle persone che estraggono una carta del seme "fiori" può essere quindi 0, 1, oppure 2. Si vuole valutare la probabilità di ciascuno di questi 3 eventi, nell'ipotesi in cui le 2 persone interpellate estraggano la carta in successione, e la carta estratta dalla prima persona venga re-inserita prima dell'estrazione successiva.

1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento e valutare le probabilità suddette.

1.2 Determinare la probabilità che almeno 1 persona estragga una carta del seme "fiori" e valutare se tale evento è indipendente dall'evento in cui tutte e 2 le persone scelgono una carta del seme "fiori".

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = Y^2$.



2.1 Determinare la densità di probabilità $f_{Z|Y\geq 0}(z|Y \geq 0)$ della variabile Z condizionata all'evento in cui $Y \geq 0$;

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z^2 + X|\, Y \geq 0]$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilità $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, dove P è la misura di probabilità su $(\Re, \mathcal{B}(\Re))$ definita dalla funzione di densità uniforme su $[0, 2]$.

Si consideri il processo a tempo discreto $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ ottenuto mediante:

$$X_n(s) = 0.5X_{n-1}(s), \forall s \in \Re \text{ con } X_0(s) = \begin{cases} -1 & s < 0.5 \\ 1 & s \geq 0.5. \end{cases}$$

3.1 Calcolare la densità di probabilità di X_1, X_2, X_3, e generalizzare l'espressione ad X_n. Il processo è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto?

3.2 Tracciare tutte le realizzazioni del processo e valutare la probabilità di ognuna di esse.

3.3 Dire se la successione $\{X_n,\ n = 1, 2, \dots\}$ converge in media quadratica alla variabile casuale Z costante ed uguale a 0, definita sullo stesso spazio di probabilità $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-2, 2]$, con valore medio nullo e potenza $P_X = 8$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da $Y(t) = X^3(t) - 4$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. Il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è gaussiano?

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso lato.

4.3 Determinare la densità di probabilità del II ordine $f_Y(\alpha_1, \alpha_2; t_1, t_2)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite a valori equiprobabili in $\{-1, 1\}$.
Si consideri il processo a tempo continuo $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k + \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$, e θ è una variabile casuale uniforme in $[0, 2]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

5.1 Determinare il valore atteso e la funzione di autocorrelazione di $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio. La risposta a questo quesito cambierebbe se si considerasse il processo $Y(t) = X(t) + V$, con V variabile casuale a valori equiprobabili in $\{-1, 1\}$, indipendente da θ e $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$?

Domande di teoria

D1. Si definiscano le nozioni di indipendenza, incorrelazione ed ortogonalità tra due variabili casuali, e se ne discutano le implicazioni reciproche.

D2. Si descriva brevemente che cosa si intende per prove Bernoulliane, riportandone un esempio.