Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2005/2006

Università degli Studi di Brescia — Data: 10/04/06

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

Date 2 urne, una contenente due biglie bianche, due nere, e due rosse, e l'altra contenente due biglie bianche e due nere, si consideri l'esperimento in cui vengono estratte in modo indipendente dalle due urne tre biglie, una dalla prima urna e due dalla seconda urna. Sotto l'ipotesi che le due estrazioni dalla seconda urna avvengano in successione, con reinserimento della prima biglia estratta, si vuole calcolare la probabilità che le tre biglie estratte siano di colore diverso.

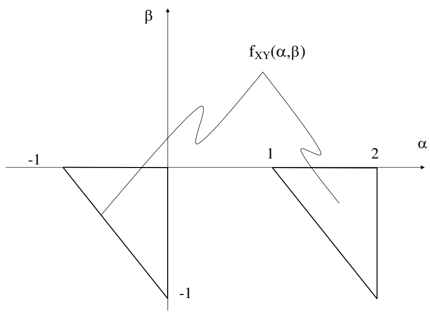
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) dell'esperimento.

1.2 Calcolare la probabilità di interesse.

1.3 Definire la variabile casuale $X : \Omega \to \{0, 1\}$ indicatrice dell'evento di interesse, e determinarne il valore medio.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme $f_{XY}(\alpha, \beta)$ nel dominio in figura.



2.1 Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = |X|$ condizionata all'evento in cui $|Y| \geq 0.5$: $f_{Z||Y|\geq 0.5}(z||Y| \geq 0.5)$;

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[2|X| - 1|\,|Y| \geq 0.5]$.

Esercizio 3

Dato lo spazio di probabilità $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ dove P è la misura di probabilità associata alla densità di probabilità $f(\alpha) = 0.5\delta(\alpha) + I_{(0.5,1]}(\alpha)$, si consideri il processo a tempo discreto $\{Y_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$:

$$Y_n(s) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{se } s \in [0, \frac{1}{(n+1)}] \\ 0, & \text{se } s \in (\frac{1}{(n+1)}, 1] \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

2.1 Determinare la densità di probabilità del II ordine del processo $\{Y_n, n = 1, 2, 3, \dots\}$: $f_Y(\alpha_1, \alpha_2; n_1, n_2) := f_{Y_{n_1} Y_{n_2}}(\alpha_1, \alpha_2)$. Il processo è stazionario in senso stretto?

2.2 Sia Y la variabile casuale costante e pari a 0, definita sullo stesso spazio di probabilità di Y_n. Dire, motivando la risposta, se la successione di variabili casuali $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ converge a Y in media quadratica.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-4, 4]$, con valore atteso nullo e potenza $P_X = 8$.
Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = X(t) + 2X(t - \frac{1}{8}) - 1 + V$ dove V è una variabile casuale con densità $f_V(v) = \frac{1}{2}\,\delta(v) + \frac{1}{2}\,\delta(v - 2)$, indipendente da $\{X(t), t \in \Re\}$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(y; t)$. $\{Y(t), t \in \Re\}$ è un processo gaussiano?

4.2 Determinare il valore medio e la funzione di autocorrelazione del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. Si tratta di un processo stazionario in senso lato?

4.3 Determinare la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.4 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Domande di teoria

D1 Si considerino 2 variabili casuali X e Y. Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta, motivando la risposta:
a) se X e Y sono indipendenti e ortogonali, allora $E[Y^2 X] = 0$.
b) se $X = Y^2$ allora X e Y non sono incorrelate.
c) se $Y = X - 1$ e X è una variabile casuale gaussiana, allora X e Y sono congiuntamante gaussiane.

D2 Descrivere che cosa si intende per un processo PAM.
Discuterne le proprietà di stazionarietà con riferimento ad un esempio (scrivere l'espressione della funzione valore atteso, della funzione di autocorrelazione e della densità spettrale di potenza).