Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — Data: 11/04/07

Cognome e nome: .... N. di matricola: ....

Esercizio 1

Si consideri l'esperimento in cui vengono estratte da un'urna contenente 4 biglie di colore diverso (una rossa, una bianca, una nera ed una gialla) due biglie in successione, reinserendo nell'urna la biglia scelta nella prima estrazione prima di eseguire l'estrazione successiva. Si vuole valutare la probabilità delle differenti combinazioni di biglie estratte.

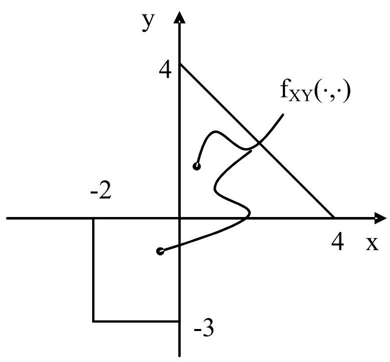
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) dell'esperimento.

1.2 Definire sullo spazio di probabilità introdotto due variabili aleatorie X e Y, dove X vale 1 se le biglie estratte sono una gialla e una bianca, e -1 negli altri casi, mentre Y vale 1 se le biglie estratte sono una nera ed una rossa, e -1 negli altri casi.

1.3 Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = XY$, e valutare se le variabili X e Y sono ortogonali.

Esercizio 2

Siano X e Y variabili casuali con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura.



2.1 Dire, motivando la risposta, se X e Y sono condizionatamente indipendenti dato l'evento $X < 0$.

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Y + 3X | X < 0]$.

2.3 Si consideri la funzione

$$g(\alpha) = \begin{cases} \alpha^2, & |\alpha| < 3 \\ 0, & |\alpha| \geq 3. \end{cases}$$

Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $Z = g(Y)$ condizionata all'evento $X < 0$, cioè $f_{Z|X<0}(z|X < 0)$.

Esercizio 3

Sia Z una variabile casuale con densità di probabilità uniforme in $[-1, 1]$. Si consideri il processo a tempo discreto $\{Y_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ costruito in base alla seguente procedura: $Y_{n+1} = 0.8Y_n$, inizializzata con $Y_0 = Z$.

3.1 Determinare la densità di probabilità del primo e del secondo ordine del processo: $f_Y(\alpha; n)$ e $f_Y(\alpha_1, \alpha_2; n_1, n_2)$.

3.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ è stazionario del 1^0 ordine (a) in senso stretto e (b) in senso lato.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-5, 5]$, a media nulla e potenza $P_X = 10$, e $\{Y(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico stazionario in senso lato, a tempo continuo, gaussiano, con densità spettrale di potenza triangolare nella banda $[-5, 5]$, a media nulla e potenza $P_Y = 5$.

Si consideri il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ definito da: $Z(t) = X(t) - Y(t - 1)$.

Sotto l'ipotesi che $\{X(t), t \in \Re\}$ e $\{Y(t), t \in \Re\}$ sono indipendenti:

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Z(\alpha; t)$ del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$.

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

4.3 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite con densità di probabilità gaussiana a valore medio nullo e varianza unitaria, e θ una variabile casuale uniforme in $[0, 3]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

Si consideri il processo stocastico a tempo continuo $\{X(t), t \in \Re\}$ definito da $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 3k - \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.

5.1 Determinare il valore atteso $E[X(t)]$ e la funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$ di $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.2 Determinare il valore atteso $E[Y(t)]$ e la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$, ottenuto filtrando $\{X(t), t \in \Re\}$ attraverso un sistema lineare, tempo invariante, caratterizzato dalla risposta all'impulso $h(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.