Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2005/2006

Università degli Studi di Brescia — Data: 19/12/05

Cognome e nome: .... Numero di matricola: ....

Esercizio 1

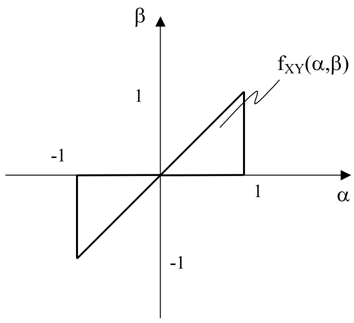
Si consideri l'esperimento in cui vengono estratte 2 biglie, una da un'urna contente 2 biglie bianche, 2 rosse e 2 nere, e l'altra da un'urna contenente 1 biglia bianca e 2 nere. Si vuole determinare la probabilità che le due biglie estratte siano entrambe nere noto che una di esse è nera.

1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento.

1.2 Calcolare la probabilità di interesse.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = X^3$.



2.1 Determinare la densità di probabilità $f_{Z|Y\geq 0,|X|\leq 0.5}(z|Y \geq 0, |X| \leq 0.5)$ della variabile Z condizionata all'evento in cui $Y \geq 0$ e contemporaneamente $|X| \leq 0.5$;

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + Y|\,|X| \leq 0.5]$;

2.3 Valutare se le variabili casuali Z e X sono ortogonali.

Esercizio 3

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-2, 2]$, con valore medio $\mu_X = 2$ e potenza $P_X = 8$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da $Y(t) = X(t) + X(t - \frac{1}{4}) - 4$.

3.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

3.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

3.3 Dire, motivando la risposta, se esistono coppie di istanti di tempo (t_1, t_2) tali che le variabili casuali $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono (a) indipendenti, (b) incorrelate e (c) ortogonali.

Esercizio 4

Si consideri il processo $Y(t) = X(t)cos(2\pi t)$, $t \in \Re$, dove $\{X(t), t \in \Re\}$ è un processo stocastico gaussiano, bianco nella banda $[-4, 4]$, con valore atteso 0 e potenza 8.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. Il processo è ciclostazionario in senso stretto del I ordine?

4.2 Determinare la densità di probabilità congiunta $f_Y(\alpha, \beta; t, t + \frac{1}{8})$ di $Y(t)$ e $Y(t + \frac{1}{8})$.

Si consideri il processo $Z(t) = Y(t + \theta)$, $t \in \Re$, dove θ è una variabile casuale uniforme in $[0, 1]$ indipendente dal processo $\{X(t), t \in \Re\}$.

4.3 Verificare che il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso lato.

4.4 Determinare l'espressione della densità spettrale di potenza del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$.

4.5 Dire, motivando la risposta, se il processo è ergodico rispetto al valore medio.

Domande di teoria

D1. Si discuta l'eventuale invarianza delle proprietà di stazionarietà in senso stretto ed in senso lato di un processo stocastico elaborato attraverso un sistema tempo invariante statico.

D2. Si descrivano brevemente le proprietà che contraddistinguono variabili e processi gaussiani.