Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2006/07

Università degli Studi di Brescia — Data: 21/12/06

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

Date 2 urne A e B, l'urna A contenente 1 biglia bianca e 2 nere, e l'urna B contenente 2 biglie bianche e 2 nere, si consideri l'esperimento in cui viene estratta da ogni urna una biglia. Noto che le due biglie estratte sono di colore diverso, una bianca e una nera, si vuole valutare la probabilità che la biglia di colore nero sia stata estratta dall'urna B.

1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento.

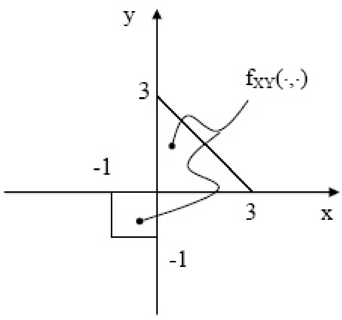
1.2 Calcolare la probabilità suddetta.

1.3 Definire sullo spazio di probabilità introdotto la variabile casuale che indica il numero di biglie estratte di colore nero. Determinare il suo valore medio.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = g(Y)$ dove

$$g(\alpha) = \begin{cases} \alpha^3, & |\alpha| < 2 \\ 0, & |\alpha| \geq 2 \end{cases}$$



2.1 Valutare se le variabili casuali X e Y sono condizionatamente indipendenti dato l'evento in cui $Y + X \leq 0$;

2.2 Determinare la densità di probabilità di Z condizionata all'evento in cui $Y + X \leq 0$: $f_{Z|Y+X\leq 0}(\beta|Y + X \leq 0)$.

2.3 Calcolare il valore atteso condizionato $E[Z + X|\,Y + X \leq 0]$.

Esercizio 3

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-1, 1]$, con valore atteso $\mu_X = 3$ e potenza $P_X = 11$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = 2X(t) - 6 + A^3$, dove A è una variabile casuale discreta a valori equiprobabili in $\{-2, 2\}$, indipendente dal processo $\{X(t), t \in \Re\}$.

3.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. $\{Y(t), t \in \Re\}$ è un processo gaussiano?

3.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso lato.

Esercizio 4

Si consideri il processo stocastico stazionario a tempo continuo $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 3k + T_0)$, dove T_0 è una variabile casuale uniforme in $[0, 3]$, $\{A_k\}$ è una successione di variabili casuali i.i.d a valori equiprobabili in $\{-3, -1, 1, 3\}$, indipendenti da T_0, e $p(t) = rect(t - 1/2)$.

4.1 Determinare valore medio e funzione di autocorrelazione di $\{X(t), t \in \Re\}$.

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

4.3 Determinare il valore atteso $E[Z(t)]$ e la densità spettrale di potenza $S_Z(f)$ del processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ ottenuto filtrando $X(t)$ con un sistema lineare tempo invariante caratterizzato dalla risposta all'impulso $h(t) = rect(t - 1/2)$.

Esercizio 5

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-5, 5]$, con valore atteso nullo e potenza $P_X = 10$.
Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = X(t-2)^2$.

5.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

5.2 Dire, motivando la risposta, se le variabili casuali $Y(2)$ e $Y(\frac{21}{10})$ sono (a) indipendenti e (b) ortogonali.

5.3 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è (a) stazionario in senso lato e (b) stazionario in senso stretto.