Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2006/07

Università degli Studi di Brescia — Data: 5/1/07

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

Su un canale di trasmissione binario simmetrico viene inviata una parola di 2 bit. Ogni bit assume valori in $\{0,1\}$, il valore 0 con frequenza doppia rispetto al valore 1, indipendentemente dal valore assunto dall'altro bit. La frequenza con cui si verifica un errore nella trasmissione di un singolo bit è dell'1%. Si vuole valutare la probabilità che si verifichino 2 errori in trasmissione, noto che è stata ricevuta una parola con tutti e 2 i bit uguali a 0.

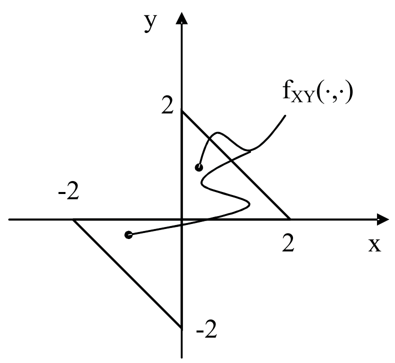
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento.

1.2 Calcolare la probabilità suddetta.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x,y)$ uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = g(Y)$ dove

$$g(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha, & |\alpha| < 1 \\ 2, & |\alpha| \geq 1 \end{cases}$$



2.1 Determinare la densità di probabilità di Z condizionata all'evento in cui $X > 0$: $f_{Z|X>0}(\beta|X > 0)$.

2.2 Determinare la probabilità dell'evento $Z \geq 2$ condizionato all'evento in cui $X > 0$: $P(Z \geq 2|X > 0)$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilità $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, dove $P : \Re \to [0,1]$ è la misura di probabilità associata dalla funzione di densità uniforme in $[0,1]$.

Si consideri il processo a tempo discreto $\{X_n,\ n = 1,2,\dots\}$ su $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, così definito:

$$X_n(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 1/n \\ 1, & s > 1/n \end{cases}$$

3.1 Disegnare le realizzazioni del processo $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ associate all'esito $s = -1$, $s = 0.5$, e $s = 1$.

3.2 Calcolare (a) la densità di probabilità delle ampiezze $f_X(\alpha; n)$ e (b) la funzione valore medio $\mu_X(n)$ del processo $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$. Il processo $\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ è stazionario in senso lato o in senso stretto?

3.3 Valutare se X_1 e X_2 sono: (a) indipendenti e (b) ortogonali.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, stazionario in senso lato, gaussiano, con densità spettrale di potenza triangolare nella banda $[-4,4]$, con valore medio nullo e potenza $P_X = 4$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da $Y(t) = X(t) + 2X(t - \frac{1}{8})$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

4.3 Determinare la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

Esercizio 5

Si consideri il processo stocastico stazionario a tempo continuo $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k)$, dove $\{A_k\}$ è una successione di variabili casuali i.i.d a valori equiprobabili in $\{-2, 2\}$ e $p(t) = rect(t - 1/2)$.

5.1 Calcolare la funzione valore atteso $\mu_X(t)$ e la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ del processo $\{X(t), t \in \Re\}$. Verificare che il processo non è stazionario in senso lato.

5.2 Costruire a partire dal processo $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stazionario in senso lato.

Domanda di teoria

Descrivere in modo conciso e chiaro che cosa si intende per processo stocastico ergodico in media quadratica rispetto al valore medio. Dare un esempio di un processo stocastico che non è ergodico in media quadratica rispetto al valore medio.