Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2006/07

Università degli Studi di Brescia — Data: 6/7/07

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

Si consideri l'esperimento in cui si scelgono a caso due numeri, ogni volta dallo stesso insieme $\{1, 2, 3, 4\}$. Si vuole valutare la probabilità dei seguenti eventi: a) uno dei due numeri scelti è dispari e l'altro è pari; b) entrambi i numeri scelti sono dispari.

1.1 Si costruisca un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento.

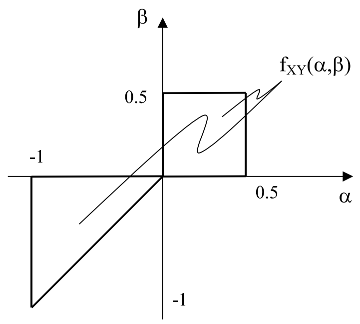
1.2 Si calcolino le probabilità suddette.

1.3 Si definisca sullo spazio di probabilità introdotto la variabile aleatoria Z che vale 2 se la somma dei due numeri estratti è dispari e zero se è pari. Quale è la distribuzione di probabilità della variabile Z?

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x, y)$ uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = g(X)$ dove

$$g(\alpha) = \begin{cases} 3\alpha, & |\alpha| < 0.5 \\ 1.5, & |\alpha| \geq 0.5 \end{cases}$$



2.1 Determinare la densità di probabilità di Z condizionata all'evento in cui $Y > 0$: $f_{Z|Y>0}(\beta|Y > 0)$.

2.2 Calcolare il valore atteso condizionato $E[Z + X|Y > 0]$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilità $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, dove $P : \Re \to [0,1]$ è la misura di probabilità associata alla distribuzione di probabilità discreta $f(\alpha) = 0.2\delta(\alpha + 1.5) + 0.8\delta(\alpha - 1.5)$.

Si consideri il processo a tempo discreto $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ su $(\Re, \mathcal{B}(\Re), P)$, così definito:

$$X_n(s) = (-1)^n I_{(-\infty,1/n]}(s)$$

dove

$$I_{(-\infty,1/n]}(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 1/n \\ 0, & s > 1/n \end{cases}$$

3.1 Disegnare tutte le realizzazioni possibili del processo $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$.

3.2 Calcolare (a) la densità di probabilità delle ampiezze $f_X(\alpha; n)$ e (b) la funzione valore medio $\mu_X(n)$ del processo $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Il processo $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto?

Esercizio 4

Siano $\{X_1(t), t \in \Re\}$ e $\{X_2(t), t \in \Re\}$ due processi stocastici indipendenti a tempo continuo, gaussiani, bianchi nella banda $[-4, 4]$, con valore medio nullo e potenza $P_X = 4$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da $Y(t) = X_1(t) + 2X_2(t-1)$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

4.3 Determinare la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.4 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Z(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite con densità di probabilità gaussiana a valore medio nullo e varianza unitaria, e θ una variabile casuale uniforme in $[0, 2]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

Si consideri il processo stocastico a tempo continuo $\{X(t), t \in \Re\}$ definito da $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k - \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.

5.1 Determinare il valore atteso $E[Y(t)]$ e la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$, ottenuto filtrando $\{X(t), t \in \Re\}$ attraverso un sistema lineare, tempo invariante, caratterizzato dalla risposta all'impulso $h(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.