Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2005/2006

Università degli Studi di Brescia — Data: 07/07/06

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

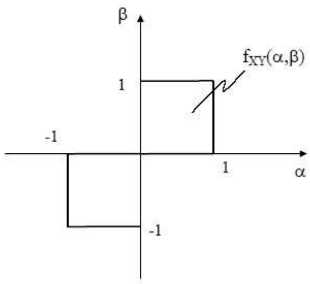
Date 2 urne A e B, l'urna A contenente 2 biglie bianche e 2 nere, e l'urna B 2 biglie bianche e 1 nera, si consideri l'esperimento in cui viene scelta a caso un'urna, e poi viene estratta dall'urna scelta 1 biglia. Si vuole valutare la probabilità che l'urna scelta sia la A sapendo che il risultato dell'esperimento è costituito dall'estrazione di una biglia bianca.

1.1 Si costruisca un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento.

1.2 Si calcoli la probabilità suddetta.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(\alpha,\beta)$ uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = Y^3$.



2.1 Determinare la densità di probabilità $f_{Z|Y\geq 0}(z|Y \geq 0)$ della variabile Z condizionata all'evento in cui $Y \geq 0$;

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + X|\, Y \geq 0]$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilità $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$ dove P è la misura di probabilità associata alla densità di probabilità uniforme su $[0,1]$. Si consideri la variabile casuale Y_n:

$$Y_n(s) = \begin{cases} n, & \text{se } s \in [0, 1/n^3) \\ 1, & \text{se } s \in [1/n^3, 1], \end{cases}$$

dove n è un numero intero positivo.

Sia Y la variabile casuale costante e pari a 1, definita sullo stesso spazio di probabilità di Y_n.
Dire, motivando la risposta, se la successione di variabili casuali $\{Y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ converge a Y: (a) in media quadratica e (b) in probabilità.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-4, 4]$, con valore atteso nullo e potenza $P_X = 8$.
Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = 2X^2(t)$.

4.1 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso stretto.

4.2 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. $\{Y(t), t \in \Re\}$ è un processo gaussiano?

4.3 Determinare la densità di probabilità congiunta $f_Y(\alpha, \beta; t, t+\tau)$ di $Y(t)$ e $Y(t+\tau)$.

4.4 Dire, motivando la risposta, se le variabili casuali $Y(1)$ e $Y(\frac{9}{8})$ sono indipendenti.

4.5 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario in senso lato.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite con densità di probabilità gaussiana a valore medio nullo e varianza unitaria, e θ una variabile casuale uniforme in $[0, 3]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.
Si consideri il processo stocastico a tempo continuo $\{X(t), t \in \Re\}$ definito da $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 3k - \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$.

5.1 Determinare il valore atteso $E[X(t)]$ e la funzione di autocorrelazione $R_X(t, t+\tau)$ di $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.