Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — Data: 20/12/04

Cognome e nome: .... N. di matricola: ....

Esercizio 1

Date 2 urne, una contenente 1 biglia bianca e 3 nere e l'altra contenente 2 biglie bianche e 2 nere, si consideri l'esperimento in cui vengono estratte in modo indipendente dalle 2 urne 2 biglie, una per urna. Si vuole calcolare la probabilità che le biglie estratte siano di colore diverso.

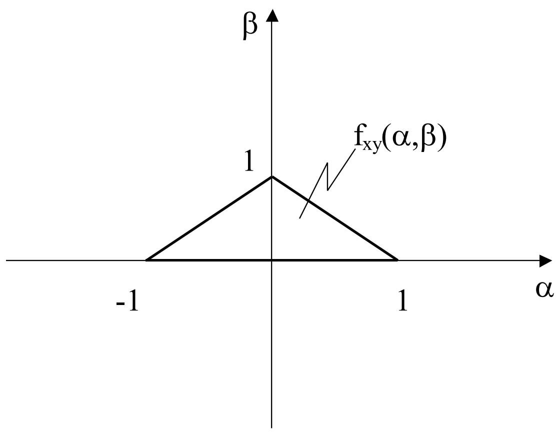
1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) dell'esperimento.

1.2 Definire la variabile casuale $X : \Omega \to \{0, 1\}$ indicatrice dell'evento di interesse, e determinarne la densità di probabilità.

1.3 Calcolare la probabilità di interesse.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità uniforme nel dominio triangolare in figura. Sia $Z = X^2$.



2.1 Determinare la densità di probabilità di Z, $f_Z(z)$.

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + Y/X \geq 0]$;

2.3 Valutare se le variabili casuali Z e X sono incorrelate.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio di probabilità $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ dove P è la misura di probabilità associata alla densità di probabilità uniforme su $[0, 1]$. Si consideri la variabile casuale Y_n:

$$Y_n(s) = \begin{cases} n, & \text{se } s \in [0, 1/n^3) \\ 1, & \text{se } s \in [1/n^3, 1], \end{cases}$$

dove n è un numero intero positivo.
Sia Y la variabile casuale costante e pari a 1, definita sullo stesso spazio di probabilità di Y_n.
Dire, motivando la risposta, se la successione di variabili casuali $\{Y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ converge a Y: (a) in media quadratica e (b) in probabilità.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-4, 4]$, con valore atteso nullo e potenza $P_X = 8$.
Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da: $Y(t) = 3X(t-2) - 3 + V$ dove V è una variabile casuale con densità $f_V(v) = \frac{1}{4}\,\delta(v) + \frac{3}{4}\,\delta(v-4)$, indipendente da $\{X(t), t \in \Re\}$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(y;t)$. $\{Y(t), t \in \Re\}$ è un processo gaussiano?

4.2 Determinare il valore medio e la funzione di autocorrelazione del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. Si tratta di un processo stazionario in senso lato?

4.3 Determinare la densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.4 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio.

Esercizio 5 Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, stazionario in senso lato, con densità spettrale di potenza $S_X(f)$.
Si consideri il processo $Y(t) = X(t)cos(2\pi t + \theta)$, con θ variabile casuale uniforme in $[0, 2\pi]$, indipendente da $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.1 Verificare che il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è anch'esso stazionario in senso lato.

5.2 Determinare l'espressione della densità spettrale di potenza $S_Y(f)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ in funzione della densità spettrale di potenza $S_X(f)$ del processo $\{X(t), t \in \Re\}$. Cercare di dare un'interpretazione al risultato trovato.

Domande di teoria

D1. Illustrare brevemente le principali proprietà che contraddistinguono le variabili casuali congiuntamente gaussiane.

D2. Definire l'ergodicità rispetto al valor medio di un processo stocastico a tempo continuo $X(t)$, ed enunciare il teorema di Slutsky.