Esame di Teoria dei Fenomeni Aleatori — a.a. 2005/2006

Università degli Studi di Brescia — Data: 29/05/06

Cognome e nome: .... Matricola: ....

Esercizio 1

Si considerino 2 urne: l'urna A contiene 2 biglie nere e 2 bianche, mentre l'urna B contiene 3 biglie nere ed 1 biglia bianca.

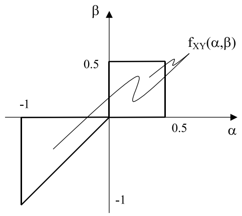
Vengono estratte 2 biglie, una per urna. Si vuole valutare la probabilità che entrambe le biglie estratte siano dello stesso colore, dato che una di esse è nera.

1.1 Costruire un modello probabilistico (spazio di probabilità) per descrivere l'esperimento. Valutare la probabilità suddetta.

1.2 Valutare se gli eventi "una delle biglie estratte è nera" e "le 2 biglie estratte sono dello stesso colore" sono indipendenti.

Esercizio 2

Si considerino le variabili casuali X e Y con densità di probabilità congiunta $f_{XY}(\alpha, \beta)$ uniforme nel dominio in figura. Sia $Z = Y^2$.



2.1 Determinare la densità di probabilità $f_{Z|Y\leq 0}(z|Y \leq 0)$ della variabile Z condizionata all'evento in cui $Y \leq 0$;

2.2 Determinare il valore atteso condizionato $E[Z + X| Y \leq 0]$.

Esercizio 3

Data la variabile casuale X_0 con densità uniforme su $[-1, 1]$, si consideri il processo a tempo discreto $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ ottenuto mediante:

$$X_n = -0.5X_{n-1}, n \geq 1.$$

3.1 Calcolare la densità di probabilità di X_1, X_2, X_3, e generalizzare l'espressione ad X_n.

3.2 Dire se la successione $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ converge in media quadratica alla variabile casuale Z costante ed uguale a 0, definita sullo stesso spazio di probabilità.

Esercizio 4

Sia $\{X(t), t \in \Re\}$ un processo stocastico a tempo continuo, gaussiano, bianco nella banda $[-4, 4]$, con valore medio nullo e potenza $P_X = 8$. Si consideri il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ definito da $Y(t) = X(t) + X(t - \frac{1}{8})$.

4.1 Determinare la densità di probabilità delle ampiezze $f_Y(\alpha; t)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$.

4.2 Determinare la funzione di autocovarianza $C_Y(t, t+\tau)$ del processo $\{Y(t), t \in \Re\}$. Dire, motivando la risposta, se esistono coppie di istanti di tempo (t_1, t_2) tali che le variabili casuali $Y(t_1)$ e $Y(t_2)$ sono (a) indipendenti, (b) incorrelate e (c) ortogonali.

4.3 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{Y(t), t \in \Re\}$ è stazionario (a) in senso lato e (b) in senso stretto.

Esercizio 5

Sia $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ una successione di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite a valori equiprobabili in $\{-1, 1\}$.

Si consideri il processo PAM: $X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - 2k + \theta)$, dove $p(t) = rect(t - \frac{1}{2})$, e θ è una variabile casuale uniforme in $[0, 2]$, indipendente da $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

5.1 Determinare la densità spettrale di potenza del processo $\{X(t), t \in \Re\}$.

5.2 Dire, motivando la risposta, se il processo $\{X(t), t \in \Re\}$ è ergodico rispetto al valore medio. La risposta a questo quesito cambierebbe se si considerasse il processo $Y(t) = X(t) + V$, con V variabile casuale a valori equiprobabili in $\{-1, 1\}$, indipendente da θ e $\{A_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$?

Domande di teoria

D1. Si dica se le proprietà di stazionarietà in senso stretto ed in senso lato di un processo stocastico elaborato attraverso un sistema tempo invariante statico vengono preservate.

D2. Si descriva brevemente che cosa si intende per prove Bernoulliane, riportandone un esempio.