Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare tempo invariante del 2^o ordine in figura 1 dove

$$G(z) = \frac{3}{(2z-1)(4z-1)}$$

e $d(t)$ é un disturbo sinusoidale.

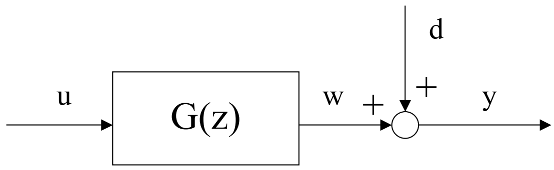

Figure 1: Sistema con uscita affetta da rumore.

1.1 Si tracci in modo qualitativo la risposta $y(t)$ del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7)$.

1.2 Progettare un regolatore in retroazione $R(z)$ secondo lo schema classico ($u = R(z)(y^\circ - y)$) in modo da soddisfare i seguenti requisiti:
i) i transitori si esauriscono in tempo finito;
ii) quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}t)$, y a regime vale 1.

1.1 Si tracci in modo qualitativo la risposta $y(t)$ del sistema retroazionato quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7)$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare tempo invariante del 2^o ordine in figura 1 dove

$$G(z) = \frac{5(z-0.55)}{6(z-0.5)(z-0.25)}$$

e $d(t)$ é un disturbo sinusoidale.

2.1 Si tracci in modo qualitativo la risposta $y(t)$ del sistema quando $u(t) = sca(t)$ e $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7)$.

Esercizio 3

Si considerino il sistema S con ingresso u ed uscita y in figura 2 dove

$$G_1(z) = \frac{1}{(z+0.5)}$$

e

$$G_2(z) = \frac{z+0.5}{z-1.5}$$

sono le f.d.t. di 2 sistemi del 1^o ordine.

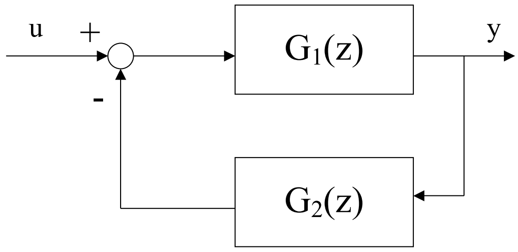

Figure 2: Sistema S con ingresso u ed uscita y.

3.1 Si determini la f.d.t. del sistema S e si dica se il sistema é asintoticamente stabile.

3.2 Si valutino le proprietá di osservabilitá e raggiungibilitá del sistema.

3.3 Si determini la risposta allo scalino $u(t) = sca(t)$.

3.4 Si consideri ora il sistema S' con ingresso u ed uscita w in figura 3.

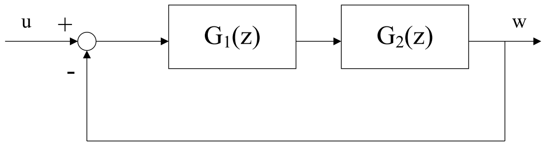

Figure 3: Sistema S' con ingresso u ed uscita w.

Si risolvano tutti i quesiti dal 3.1 al 3.3. Si dica se é possibile posizionare gli autovalori di S' in $\lambda = 0.5$ mediante una retroazione dinamica sull'uscita w.

3.5 Si alimenti il sistema con funzione di trasferimento $G_2(z)$ con il segnale $y(t)$ calcoltao al punto 3.3. Quale é l'andamento della sua uscita?

Esercizio 4 Un sistema completamente raggiungibile e osservabile e asintoticamente stabile ha i diagrammi di Bode della risposta in frequenza tracciati in figura 4.

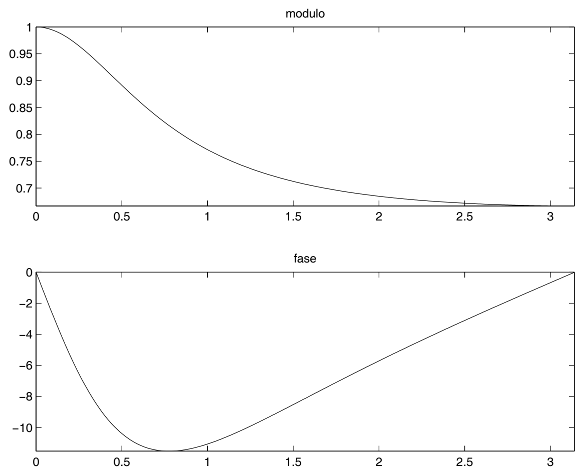

Figure 4: Diagrammi di Bode.

4.1 Si determini la riposta a regime al segnale in ingresso $u(t) = 2sen(2\pi t + \pi/2) + sen(\pi/2t)$.

4.2 Si tracci il diagramma di Nyquist a partire dal diagramma di Bode.

4.3 Si dica se il sistema retroazionato con retroazione negativa unitaria é asintoticamente stabile con guadagno in anello chiuso in pari a 0.5.

4.4 Si consideri un regolatore proporzionale $R(z) = \mu$ da inserire nell'anello di retroazione secondo lo schema classico di controllo in retroazione. Si dica se esiste un valore di $\mu > 0$ che destabilizza il sistema in anello chiuso. Si valuti il guadagno del sistema retroazionato in funzione di μ.

4.5 Si dica se il sistema retroazionato con retroazione unitaria positiva é asintoticamente stabile.

Soluzione dell'esercizio 1

Quesito 1.1

L'uscita y é la somma dei segnal w e d, dove w é la risposta allo scalino di $G(z)$. Ai fini del tracciamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema con f.d.t. $G(z)$ costruiamo un sistema approssimante $G'(z)$ del sistema $G(z)$ per il quale sia piú semplice tracciare la risposta allo scalino. Nel costruire $G'(z)$ si devono preservare le caratteristiche salienti della risposta e cioé il guadagno, il tempo di assestamento e la modalitá di assestamento. Altra proprietá é la differenza tra il grado del numeratore e quello del denominatore. Se il grado del denominatore differisce di k da quello del numeratore, allora il sistema ha risposta forzata nulla fino all'istante k (si verifichi questa proprietá realizzando il sistema in variabili di stato).

In questo caso si puó approssimare la f.d.t. del sistema con

$$G'(z) = \frac{1}{2z(z-0.5)}$$

(i poli di $G(z)$ danno entrambi un contributo monotono decrescente, ed il contributo del polo in 0.25 si esaurisce piú rapidamente rispetto a quello in 0.5). $G'(z)$ é la serie del sistema ritardo unitario con f.d.t. $\frac{1}{z}$ e di un sistema con f.d.t. $\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}$. La risposta y é quella in figura 5. Si noti che all'istante in cui interviene il disturbo d sinusoidale w si é quasi assestato al valore 1 (in 6 passi $0.5^6 = 0.0156$). Si riporta in figura 6 la risposta non approssimata.

Quesito 1.2

Utilizziamo il metodo di sintesi diretta. Dobbiamo determinare la f.d.t. ad anello chiuso $F^\circ(z) = \frac{B^\circ(z)}{A^\circ(z)}$ tra y° e y in modo da soddisfare tutte le specifiche.

Per la realizzabilitá del regolatore: $gr(A^\circ(z)) - gr(B^\circ(z)) \geq 2$.

Per la stabilitá ed il tempo finito di risposta: $A^\circ(z) = z^m$.

La f.d.t. tra y° ed il segnale errore $e = y^\circ - y$ é $1 - F^\circ(z)$. Quella tra il disturbo ed il segnale errore é $F^\circ(z) - 1$. Per soddisfare i requisiti di prestazione statica: $1 - F^\circ(1) = 0$ (dal teorema del valore finale) e $F^\circ(e^{j\frac{\pi}{2}}) - 1 = 0$ (dal teorema della risposta in frequenza). (Si noti che queste condizioni implicano che il regolatore $R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F^\circ(z)}{1-F^\circ(z)}$ abbia tra i suoi poli 1 e $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$).

Procedendo per tentativi a partire da $m = 2$, si ottiene per $m = 4$ che i coefficienti di $F^\circ(z) = \frac{\alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3}{z^4}$ devono soddisfare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 j + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

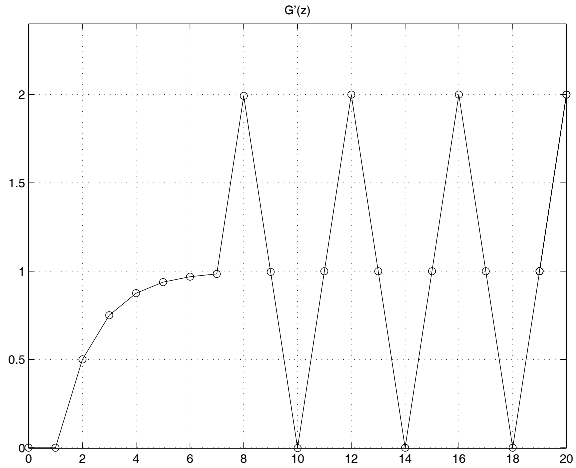

Figure 5: Risposta approssimata

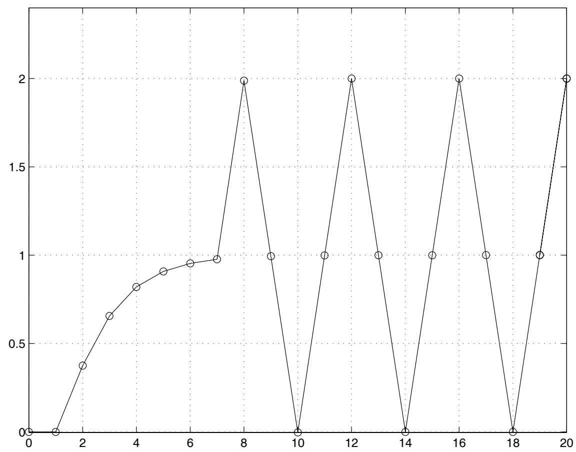

Figure 6: Risposta esatta

da cui $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$

Quindi $F^\circ(z) = \frac{1}{z^4}$, da cui $R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F^\circ(z)}{1-F^\circ(z)} = \frac{(2z-1)(4z-1)}{3} \frac{1}{z^4-1}$.

Come previsto 1 e j sono tra i poli di $R(z)$.

Quesito 1.3

Applico la sovrapposizione degli effetti considerando le uscite quando $y^\circ(t) = sca(t)$ e $d(t) = 0$, e quando $y^\circ(t) = 0$ e $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7)$, e poi sommandole.

Dato che $F^\circ(z) = z^{-4}$, la risposta a $y^\circ(t) = sca(t)$ é $y(t) = sca(t-4)$.

Dato che la f.d.t. tra $d(t)$ e y é $1 - F^\circ(z)$, la risposta a $d(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7)$ é $y(t) = sen(\frac{\pi}{2}(t-7))sca(t-7) - sen(\frac{\pi}{2}(t-11))sca(t-11)$, che é identicamente nulla per $t \geq 11$.

Si riporta in figura 7 la risposta complessiva.

Soluzione dell'esercizio 2

In questo caso si puó approssimare la f.d.t. del sistema con

$$G'(z) = \frac{3}{4z-1}$$

(il contributo del polo piú lento in 0.5 é cancellato dallo zero in 0.55).

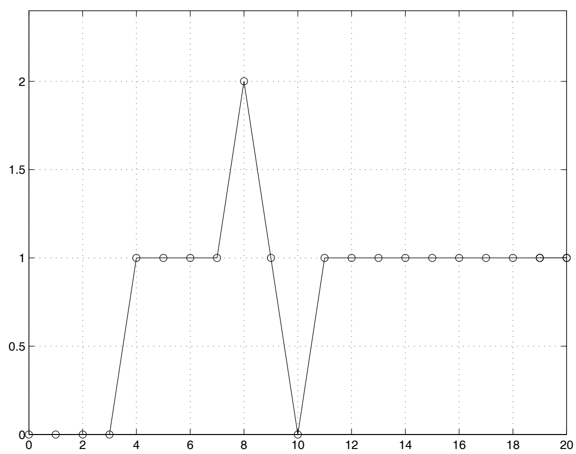

Figure 7: Risposta sistema retroazionato

La risposta y é quella in figura 8. Si noti che all'istante in cui interviene il disturbo d sinusoidale w si é ormai assestato al valore 1 (in 6 passi $0.25^6 = 2.410^{-4}$). Si riporta in figura 9 la risposta non

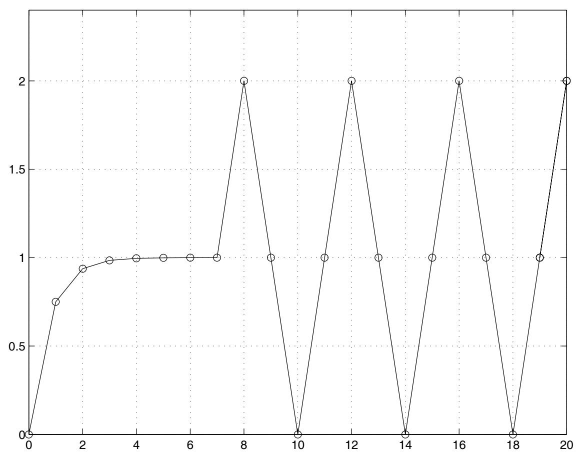

Figure 8: Risposta approssimata

approssimata.

Soluzione dell'esercizio 3

Quesito 3.1

$G(z) = \frac{z-1.5}{(z+0.5)(z-0.5)}$

Il sistema S é del 2^o ordine, allora ha autovalori dati dai poli di $G(z)$ in 0.5 e $-0,5$, ed é quindi asintoticamente stabile.

Quesito 3.2

Il sistema é completamente raggiungibile e completamente osservabile perché il numero di poli della sua f.d.t. é uguale all'ordine del sistema.

Quesito 3.3

La risposta allo scalino si calcola con lo sviluppo in fratti semplici. Qui é omessa...

Quesito 3.4

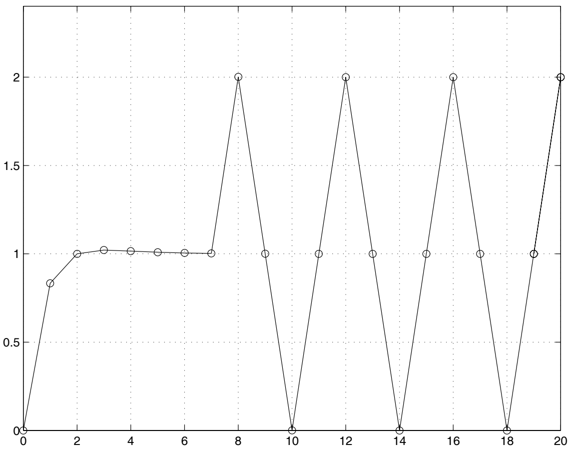

Figure 9: Risposta esatta

$G'(z) = \frac{1}{z-0.5}$.

Il sistema ha parti nascoste perché la sua f.d.t. presenta un solo polo mentre si tratta di un sistema di ordine 2. La stabilitá non é deducibile dalla f.d.t.

In questo caso peró notiamo che S' differisce da S solo per l'uscita. La stabilitá non dipende dall'uscita, allora S' é as. stabile perché lo é S (gli autovalori di S' sono quelli di S e cioé 0.5 e -0.5). Inoltre dato che S era completamente raggiungibile, lo é anche S'. S' é non completamente osservabile ed ha parte non osservabile con autovalore in -0.5.

La risposta allo scalino si calcola con lo sviluppo in fratti semplici. Qui é omessa...

La parte osservabile ha autovalore in -0.5, non é quindi possibile assegnare ad S' autovalori in 0.5 mediante retroazione sull'uscita w.

Quesito 3.5

La risposta che si determina é la stessa ottenuta al punto 3.4. Questo perché il segnale $y(t)$ che si considera in ingresso a $G_2(z)$ é uguale a quello che agisce all'ingresso di $G_2(z)$ posta nello schema di retroazione qunado in ingresso si ha uno scalino.

Verificare ció con i conti (sempre nel dominio delle trasformate...)

Soluzione dell'esercizio 4

Quesito 4.1

Indico con $G(z)$ la f.d.t. del sistema. Applico la sovrapposizione degli effetti.

Dato che $2sen(2\pi t + \pi/2) = 2$, a regime si ha: $2G(0) = 2$.

Per quanto riguarda $sen(\pi/2t)$, dal teorema della risposta in frequenza e dall'asintotica stabilitá del sistema segue che a regime si ha: $|G(e^{j\pi/2})|sen(\pi/2 + arg(G(e^{j\pi/2}))) = 0.7sen(\pi/2 - 8/180\pi)$

Quesito 4.2

Il diagramma di Nyquist é riportato in figura 10.

Quesito 4.3

Il sistema in anello aperto é asintoticamente stabile, quindi per il criterio di Nyquist é asintoticamente stabile se e solo non compie nessun giro attorno al punto -1 e non passa per tale ppunto.

Nel caso in questione il sistema é asintoticamente stabile. Inoltre la f.d.t. ad anello chiuso ha

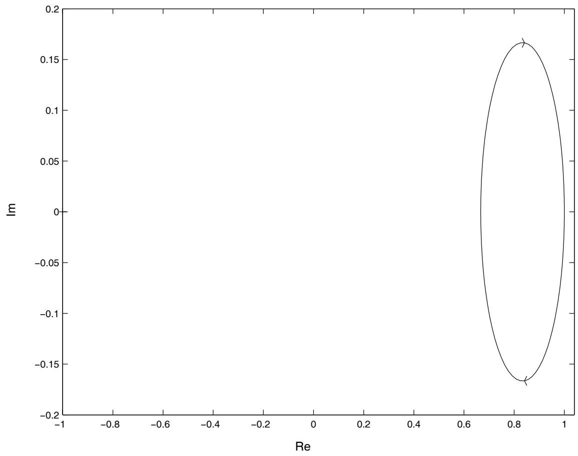

Figure 10: Diagramma di Nyquist.

guadagno $G(0)/(1 + G(0))$, quindi pari a 0.5.

Introducendo un regolatore proporzionale con $\mu > 0$ non si destabilizza il sistema perché il diagramma di Nyquist di $\mu G(z)$ rimane nel semipiano reale positivo. Il guadagno ad anello chiuso diventa $\mu/(1 + \mu)$, e quindi tende ad uno all'aumentare di μ.

Quesito 4.4

Il sistema con f.d.t. $G(z)$ retroazionato con retroazione unitaria positiva puó essere visto come il sistema con f.d.t. $-G(z)$ retroazionato con retroazione unitaria negativa. Il diagramma di Nyquist di $-G(z)$ si ottiene per simmetria rispetto all'origine di quello di $G(z)$, di conseguenza passerá per il punto -1. Dal criterio di Nyquist segue che il sistema retroazionato non é asintoticamente stabile perché il numero di giri attorno a -1 non é ben definito.