

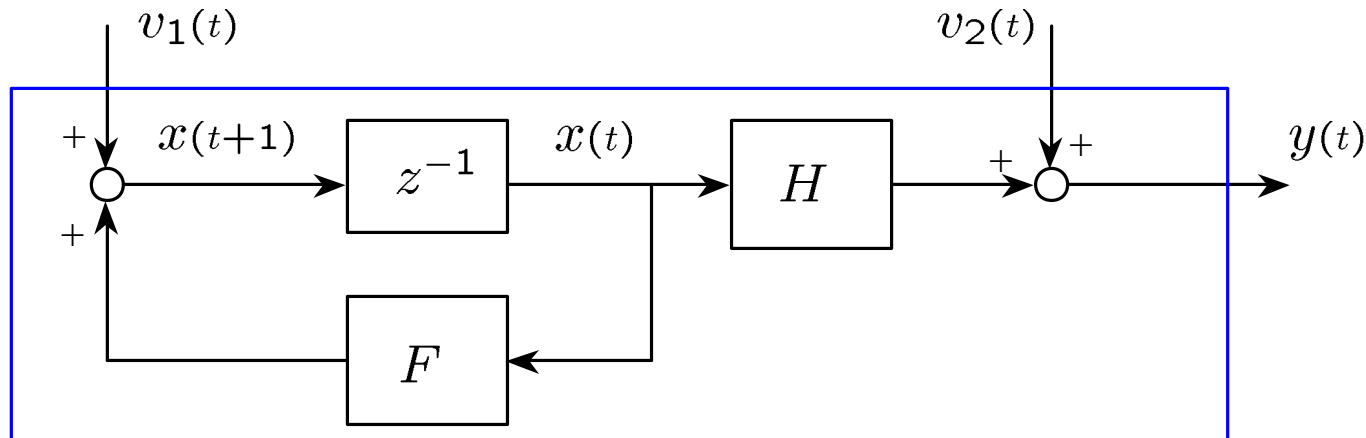
Filtro di Kalman: Teoria asintotica

Maria Prandini

Politecnico di Milano

prandini@elet.polimi.it

Meccanismo di generazione dati



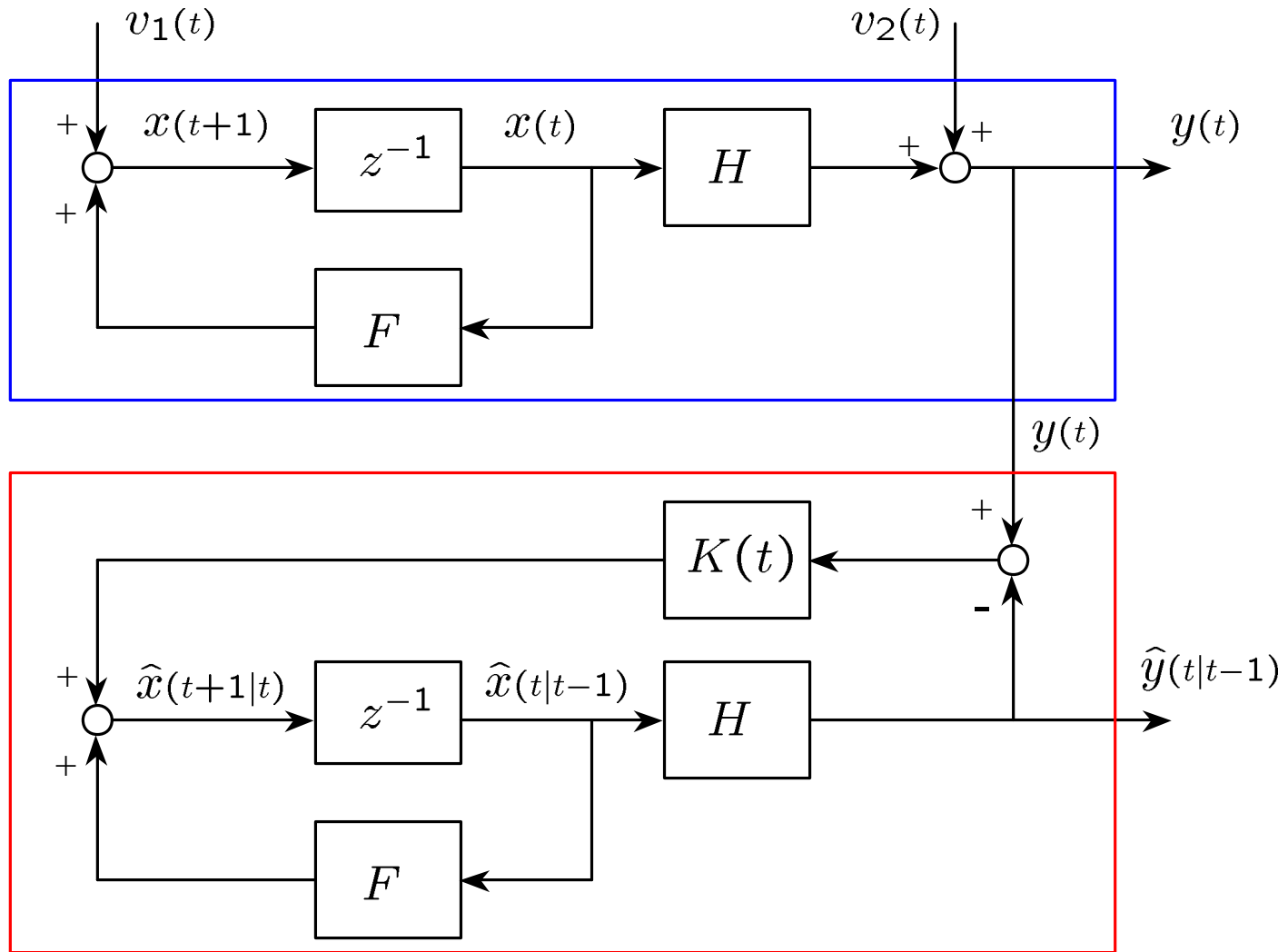
$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

sistema tempo invariante

$$v_1(t) \sim WN(0, V_1), v_2(t) \sim WN(0, V_2), V_2 > 0$$

stazionari e indipendenti

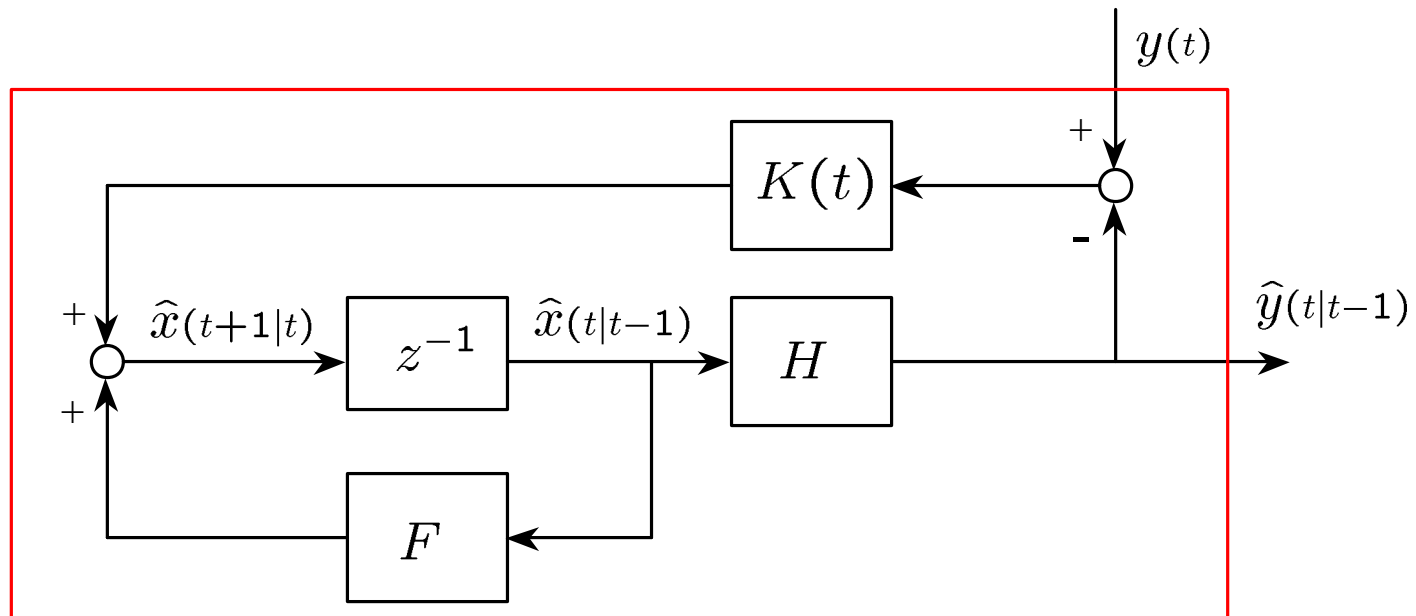
Predittore di Kalman



Predittore di Kalman

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

guadagno tempo variante



Predittore di Kalman

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(t)(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

**guadagno
tempo variante**

$$K(t) = FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}$$

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 \quad \text{DRE}$$

$$-FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

Predittore di Kalman

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = (F - K(t)H)\hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

**matrice dinamica
del predittore**

$$K(t) = FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}$$

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 \quad \text{DRE}$$

$$-FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

Dinamica dell'errore di predizione

$$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1) \quad \text{errore di predizione}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

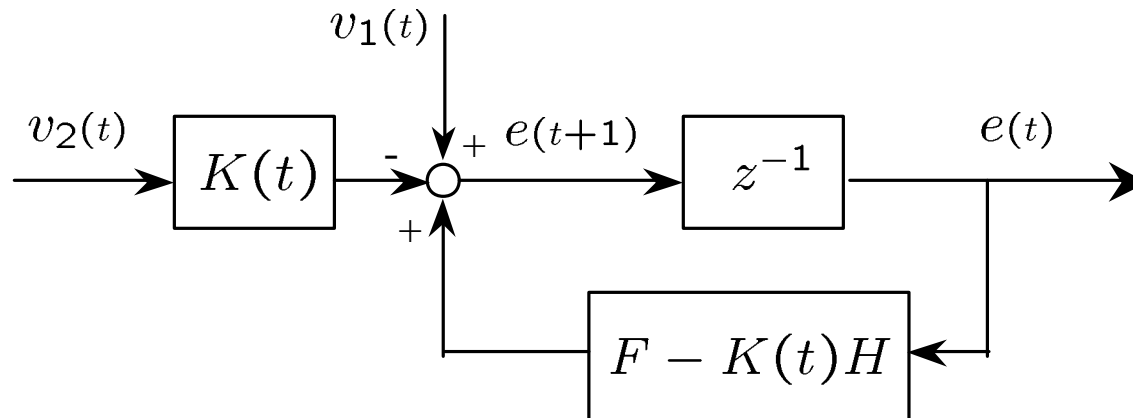
$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = (F - K(t)H) \hat{x}(t|t-1) + K(t)y(t) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

$$e(t+1) = (F - K(t)H) e(t) - K(t)v_2(t) + v_1(t)$$

Dinamica dell'errore di predizione

$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ errore di predizione

$$e(t+1) = (F - K(t)H) e(t) - K(t)v_2(t) + v_1(t)$$



Dinamica dell'errore di predizione

$$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1) \quad \text{errore di predizione}$$

$$e(t+1) = (F - K(t)H) e(t) - K(t)v_2(t) + v_1(t)$$

**matrice varianza dell'errore di
predizione dello stato all'istante t+1**

$$\begin{aligned} P(t+1) &= FP(t)F^T + V_1 && \text{DRE} \\ &\quad - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1} HP(t)F^T \\ &= (F - K(t)H)P(t)(F - K(t)H)^T + K(t)V_2K(t)^T + V_1 \end{aligned}$$

Teoria asintotica

Q1: $P(t) \rightarrow \bar{P}, t \rightarrow \infty?$

cioè la matrice di varianza dell'errore di predizione dello stato (e quindi dell'uscita $HP(t)H^T + V_2$) convergono?

→ l'errore di predizione rimane limitato nel tempo

Teoria asintotica

Q2: $F - \bar{K}H$ con $\bar{K} = F\bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1}$ è
asintoticamente stabile?

→ l'errore di predizione non diverge in presenza di
imprecisioni numeriche e/o disturbi non modellati
(si dice che \bar{K} è stabilizzante)

$P(t)$ convergente $\not\rightarrow \bar{K}$ stabilizzante

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 \\ -FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

$P(t)$ convergente $\not\rightarrow \bar{K}$ stabilizzante

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$P(t+1) = 4P(t)$$

se $x(1)$ è nota

$$x(1|0) = x(1)$$

$$P(1) = E[(x(1) - x(1|0))^2] = 0$$

$P(t)$ convergente $\not\rightarrow \bar{K}$ stabilizzante

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$P(t+1) = 4P(t)$$

se $x(1)$ è nota

$$x(1|0) = x(1)$$

$$P(1) = 0 \rightarrow \boxed{P(t) = 0, \forall t \geq 0} \quad \text{errore di predizione nullo}$$

$$K(t) = FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1} = 0$$

$$\hat{x}(t+1|t) = \boxed{2}\hat{x}(t|t-1) \quad \text{predittore instabile}$$

$P(t)$ convergente $\not\rightarrow \bar{K}$ stabilizzante

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$\hat{x}(t+1|t) = 2\hat{x}(t|t-1) \quad \text{predittore di regime instabile}$$

$$x(1|0) = x(1) + \epsilon$$

$$\begin{aligned} e(t+1) &= 2e(t) \\ e(1) &= \epsilon \end{aligned} \quad \rightarrow e(t) = 2^{t-1}\epsilon$$

Teoria asintotica

Q1: $P(t) \rightarrow \bar{P}, t \rightarrow \infty?$

cioè la matrice di varianza dell'errore di predizione dello stato (e quindi dell'uscita $HP(t)H^T + V_2$) convergono?

→ l'errore di predizione rimane limitato nel tempo

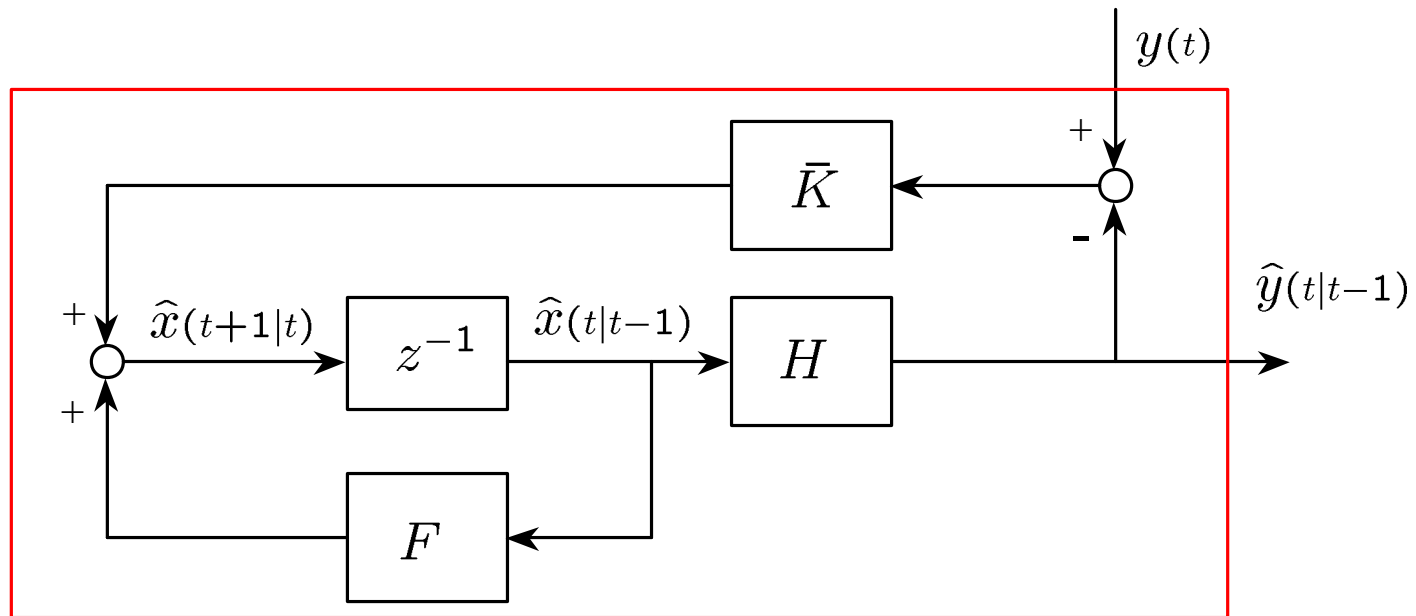
Q2: $F - \bar{K}H$ con $\bar{K} = F\bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + V_2)^{-1}$ è asintoticamente stabile?

→ l'errore di predizione non diverge in presenza di imprecisioni numeriche e/o disturbi non modellati (si dice che \bar{K} è stabilizzante)

predittore di Kalman di regime

Predittore di Kalman di regime

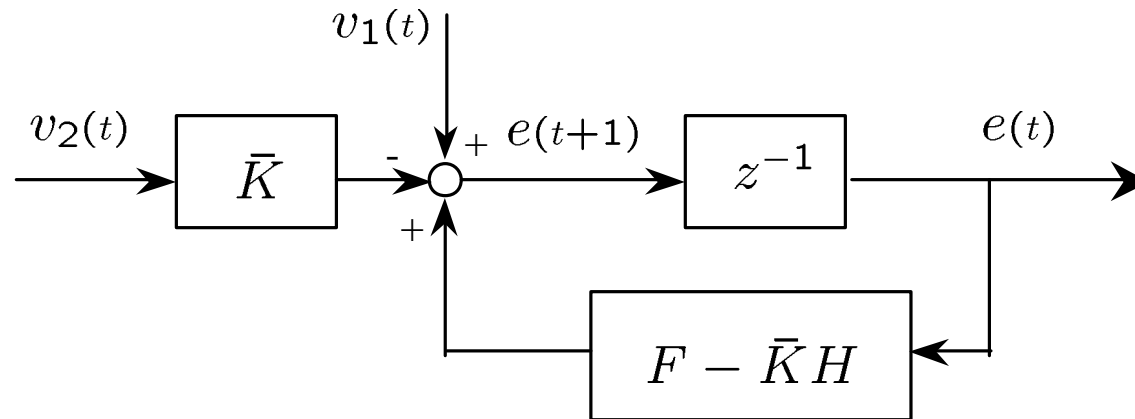
$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$



sub-ottimo, ma meno calcoli e occupazione di memoria

Predittore di regime: dinamica dell'errore

$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ errore di predizione



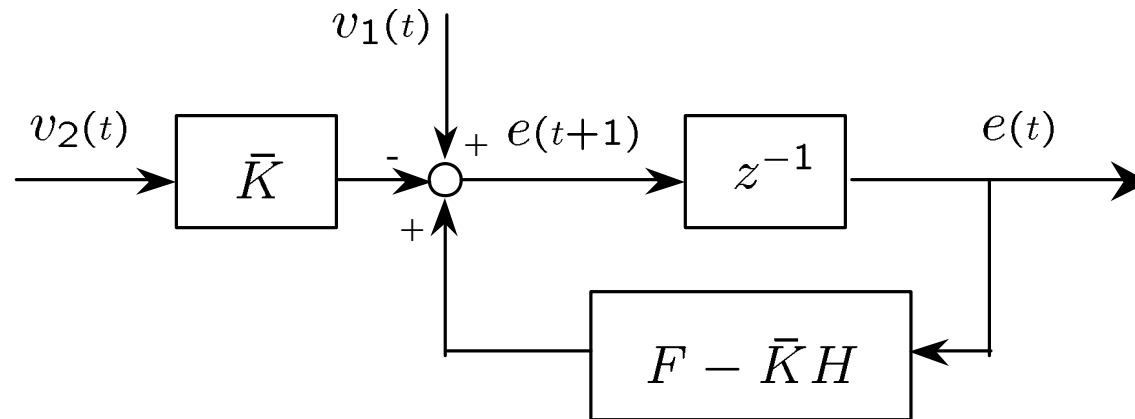
$$e(t+1) = (F - \bar{K}H)e(t) - \bar{K}v_2(t) + v_1(t)$$

$$\text{var}[e(t+1)] = E[e(t+1)e(t+1)^T]$$

$$= (F - \bar{K}H)\text{var}[e(t)](F - \bar{K}H)^T + \bar{K}V_2\bar{K}^T + V_1$$

Predittore di regime: dinamica dell'errore

$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ errore di predizione



$$e(t+1) = (F - \bar{K}H)e(t) - \bar{K}v_2(t) + v_1(t)$$

$\text{var}[e(t)] \rightarrow \bar{P}$ soluzione equazione di Lyapunov

$$P = (F - \bar{K}H)P(F - \bar{K}H)^T + V_1 + \bar{K}V_2\bar{K}^T$$

Risultati asintotici

$$P(t + 1) = FP(t)F^T + V_1 \\ - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

(F, H) rivelabile significa che l'eventuale parte non osservabile dello stato del sistema

$$\begin{cases} x(t + 1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

è stabile

Nell'esempio precedente:

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

(F,H) non rivelabile (sistema non osservabile instabile)

$$P(t+1) = 4P(t)$$

se $x(1)$ non è nota

$$P(1) \neq 0 \rightarrow \boxed{P(t) \rightarrow \infty}$$

errore di predizione
non limitato

Nell'esempio precedente:

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

(F,H) non rivelabile (sistema non osservabile instabile)

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

Nell'esempio precedente:

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

(F,H) non rivelabile (sistema non osservabile instabile)

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = 2\hat{x}(t|t-1) + Kv_2(t) \\ \hat{y}(t|t-1) = 0 \end{cases}$$

Nell'esempio precedente:

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

(F,H) non rivelabile (sistema non osservabile instabile)

$$e(t+1) = \boxed{2}e(t) - Kv_2(t) \quad \text{non esiste } K \text{ stabilizzante}$$

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 \\ -FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

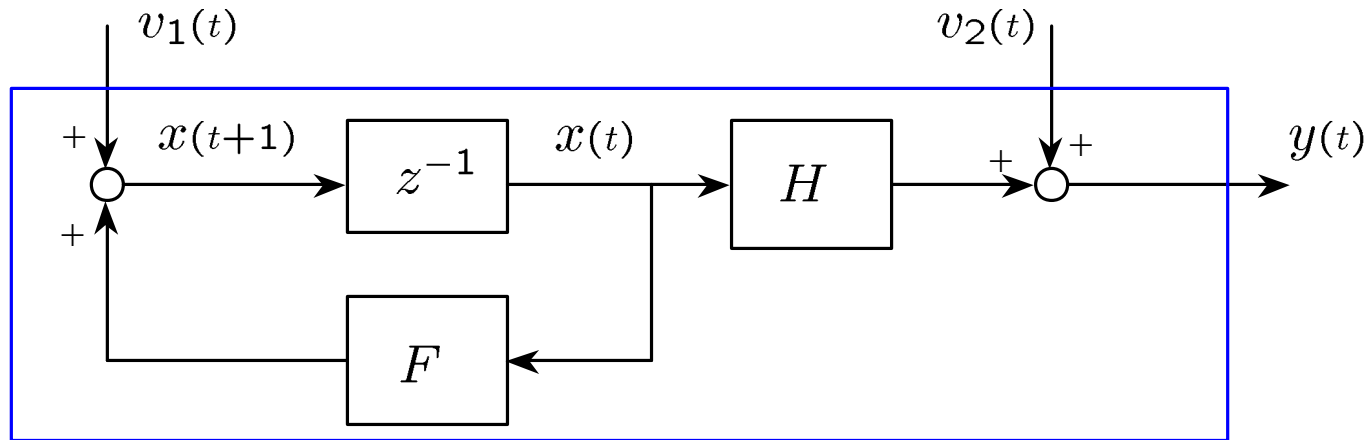
(F, H) rivelabile significa che l'eventuale parte non osservabile dello stato del sistema

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

è stabile

Inoltre esiste K tale che $F-KH$ è stabile.

Scomposizione in parte osservabile/non osservabile

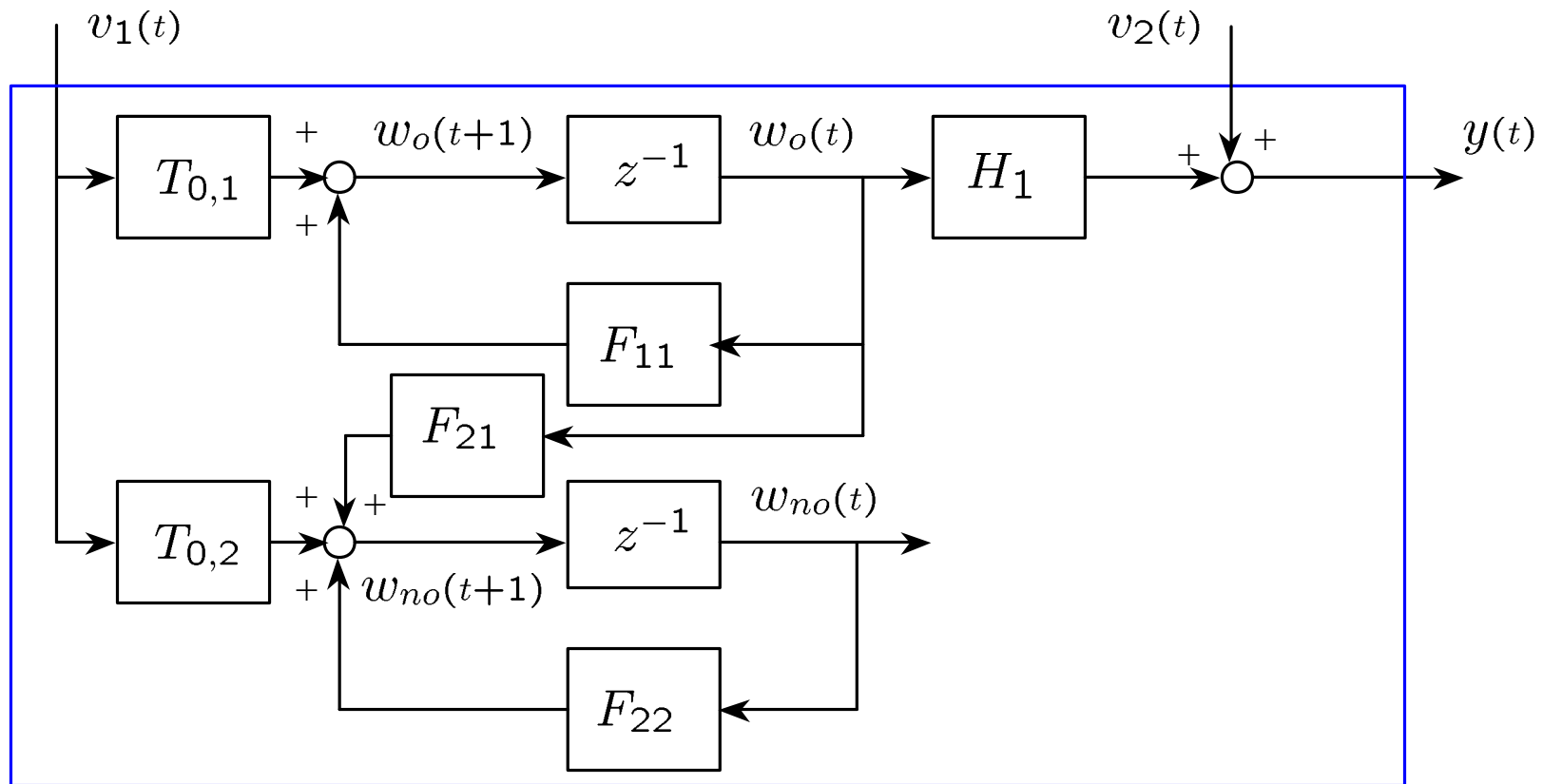


$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

**matrice di cambiamento di base per la scomposizione
in parte osservabile e non osservabile**

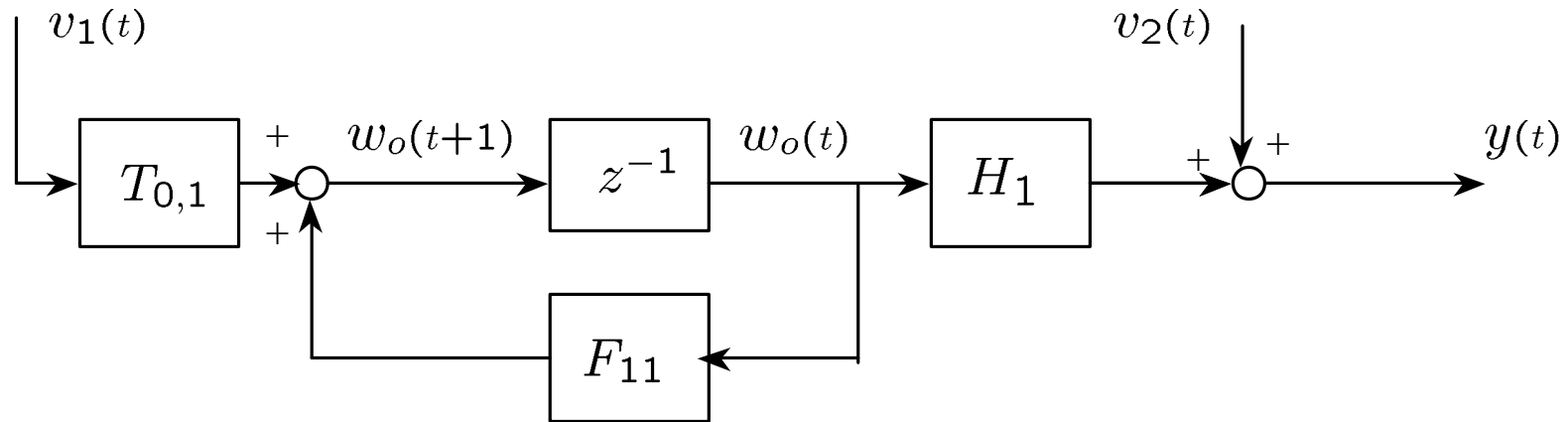
$$w := \begin{matrix} \downarrow \\ \boxed{T_o} \end{matrix} x$$

Scomposizione in parte osservabile/non osservabile



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} w_o(t+1) \\ w_{no}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o(t) \\ w_{no}(t) \end{bmatrix} + T_o v_1(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o(t) \\ w_{no}(t) \end{bmatrix} + v_2(t) \end{cases}$$

Parte osservabile

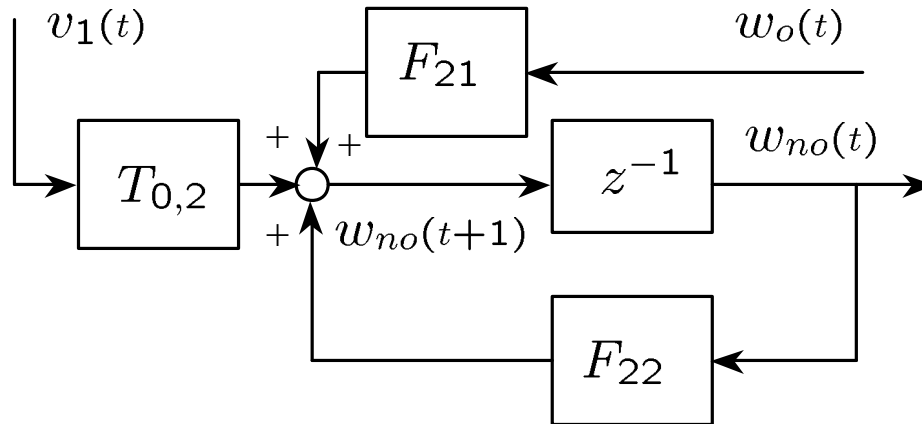


$$\begin{cases} w_o(t+1) = F_{11}w_o(t) + T_{o,1}v_1(t) \\ y(t) = H_1w_o(t) + v_2(t) \end{cases}$$

sotto-sistema (F_{11}, H_1) osservabile, non necessariamente stabile

→ l'uscita contiene informazioni sulla componente osservabile dello stato, sembrerebbe possibile predirla

Parte non osservabile

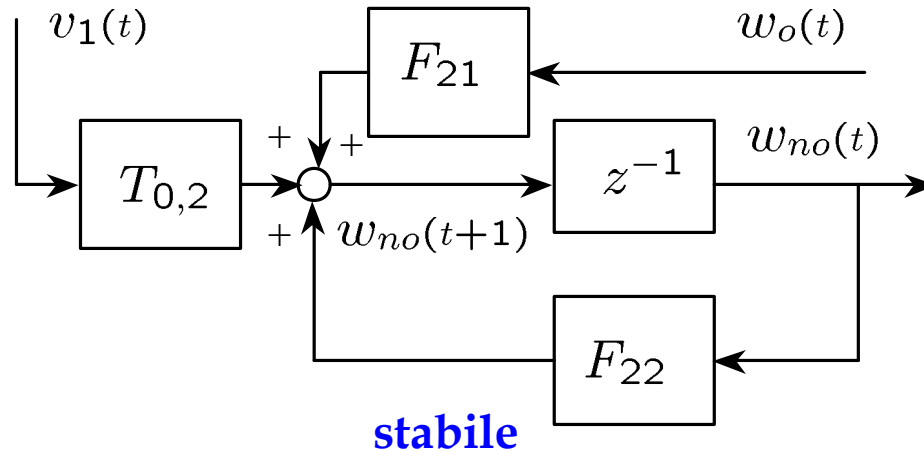


$$w_{no}(t + 1) = F_{22} w_{no}(t) + F_{21} w_o(t) + T_{o,2} v_1(t)$$

sotto-sistema non osservabile

→ l'uscita non è influenzata dalla parte non osservabile dello stato

Parte non osservabile



segnali che influenzano
la parte non osservabile

$$w_{no}(t + 1) = \boxed{F_{22}} w_{no}(t) + \boxed{F_{21} w_o(t) + T_{o,2} v_1(t)}$$

- il contributo diretto di v_1 e quello della condizione iniziale alla parte non osservabile dello stato è limitato
- il contributo di w_0 non è necessariamente limitato ma è “ricostruibile” tramite l’uscita y

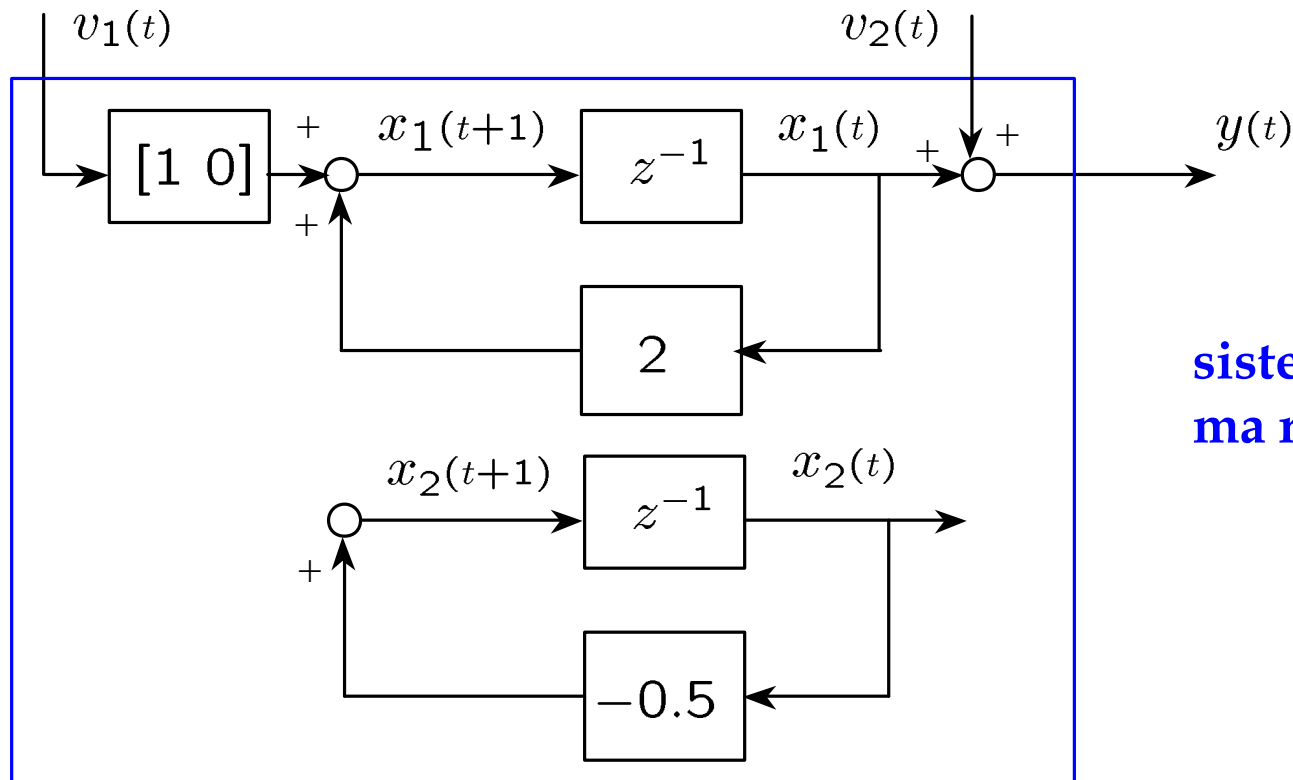
Esempio

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1(t) \sim WN(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ v_2(t) \sim WN(0, 1) \end{matrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempio

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) + [1 \ 0] v_1(t) \\ x_2(t+1) = -0.5x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + v_2(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1(t) \sim WN(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ v_2(t) \sim WN(0, 1) \end{matrix}$$



**sistema non osservabile,
ma rivelabile**

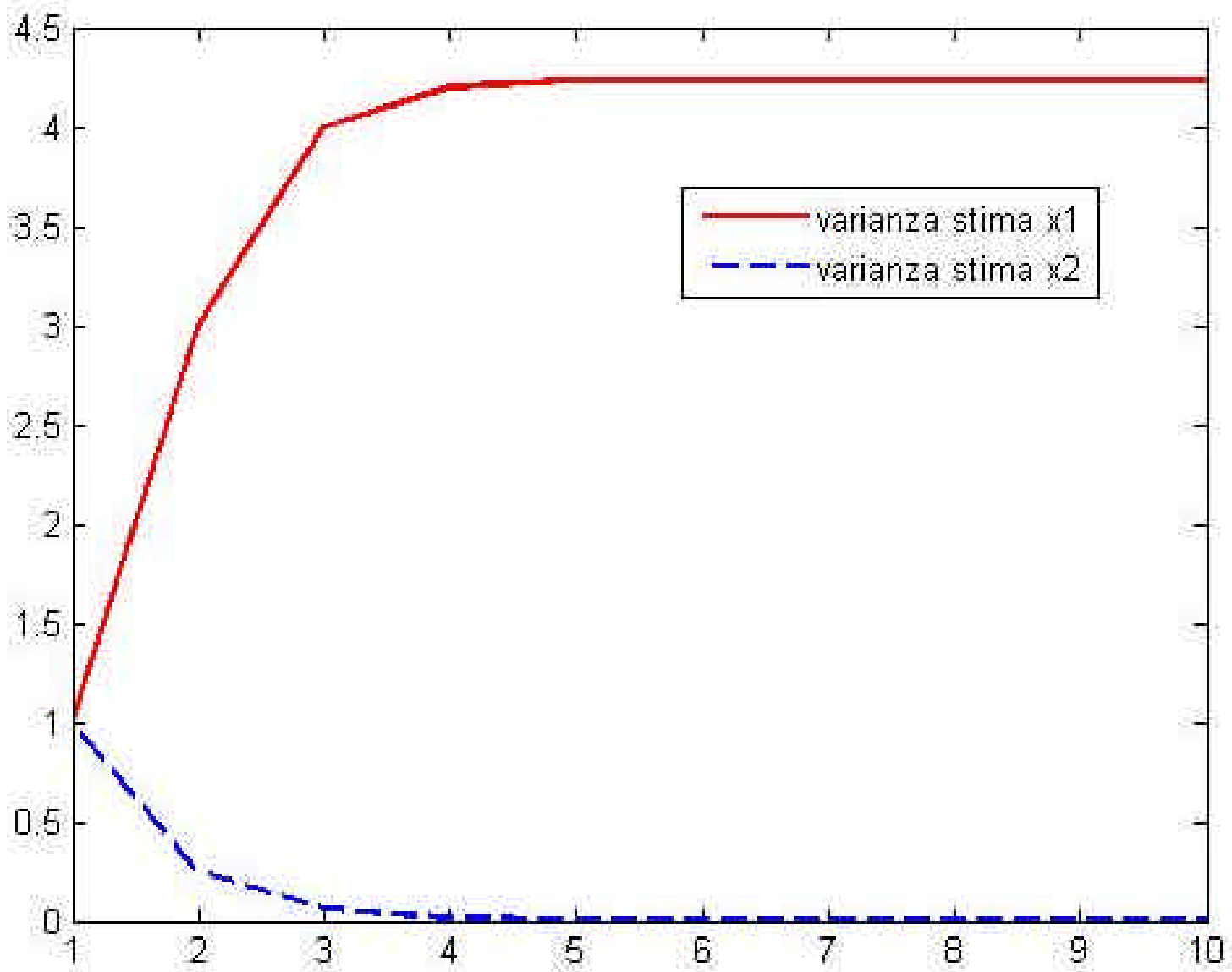
Esempio

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1(t) \sim WN(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ v_2(t) \sim WN(0, 1) \end{matrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 - \frac{FP(t)H^T HP(t)F^T}{HP(t)H^T + V_2}$$

$$P(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Esempio

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} v_1(t) \sim WN(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ v_2(t) \sim WN(0, 1) \end{matrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

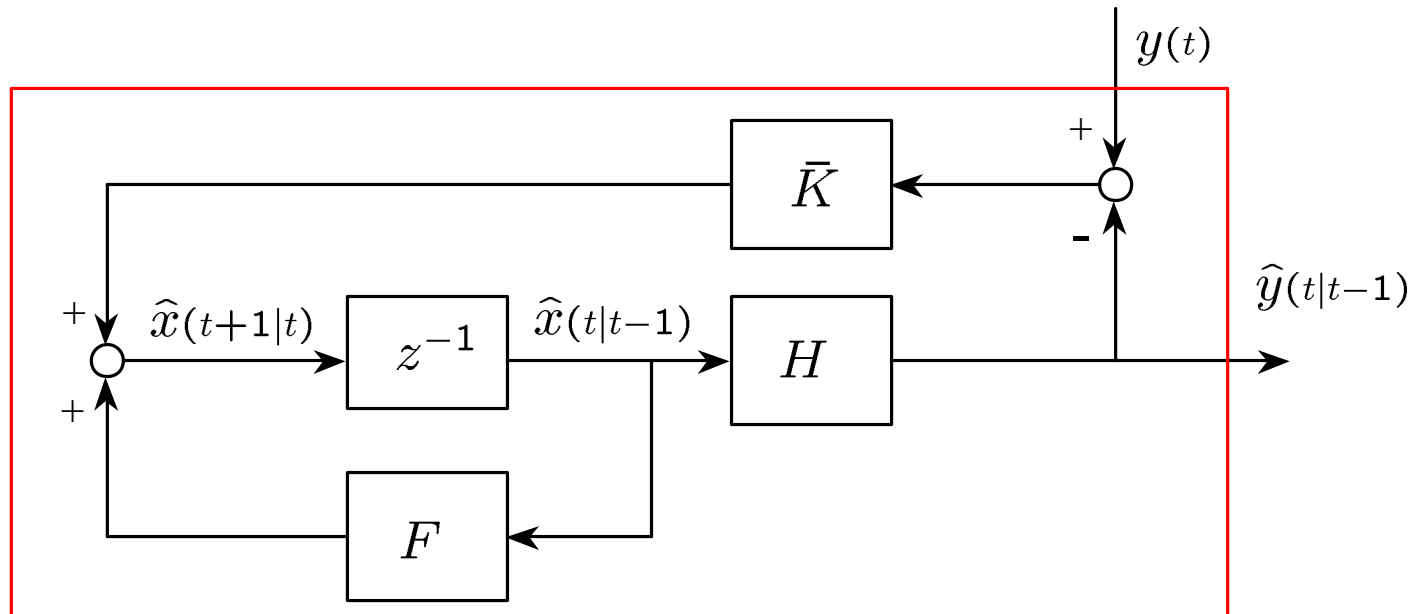
$$P(t) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non solo limitata, ma
anche convergente

$$K(t) \rightarrow \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{5})/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

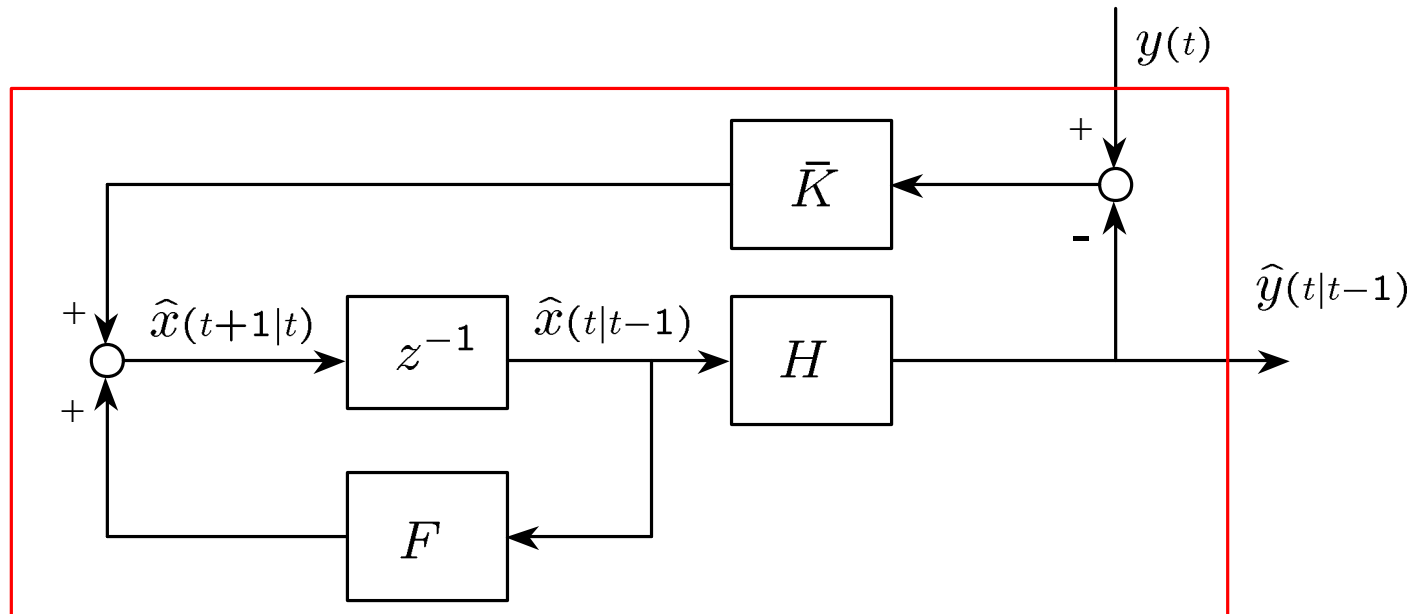
Esempio: Predittore di Kalman di regime

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + \bar{K}(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{y}(t|t-1) = H\hat{x}(t|t-1) \end{cases}$$

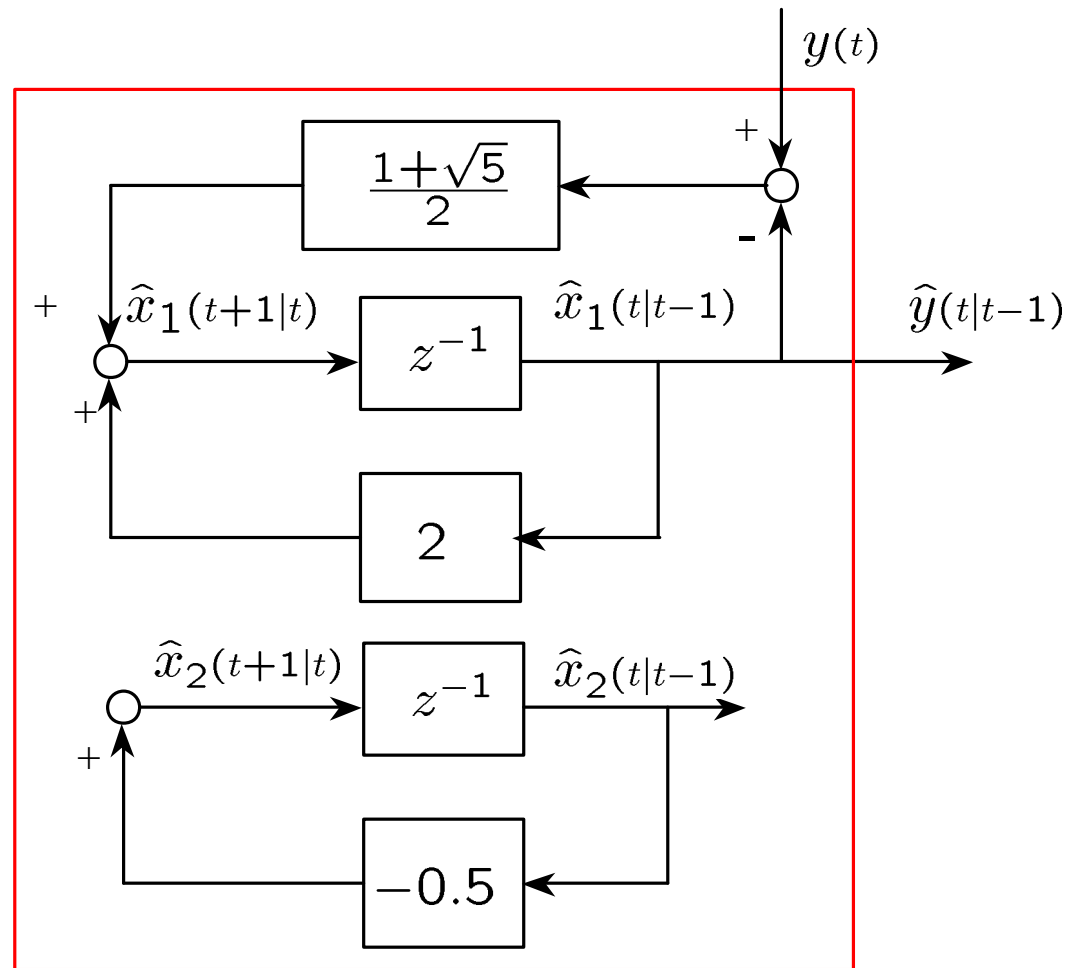


Esempio: Predittore di Kalman di regime

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1(t+1|t) = 2x_1(t) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}(y(t) - \hat{y}(t|t-1)) \\ \hat{x}_2(t+1|t) = -0.5\hat{x}_2(t|t-1) \\ \hat{y}(t|t-1) = \hat{x}_1(t|t-1) \end{array} \right.$$

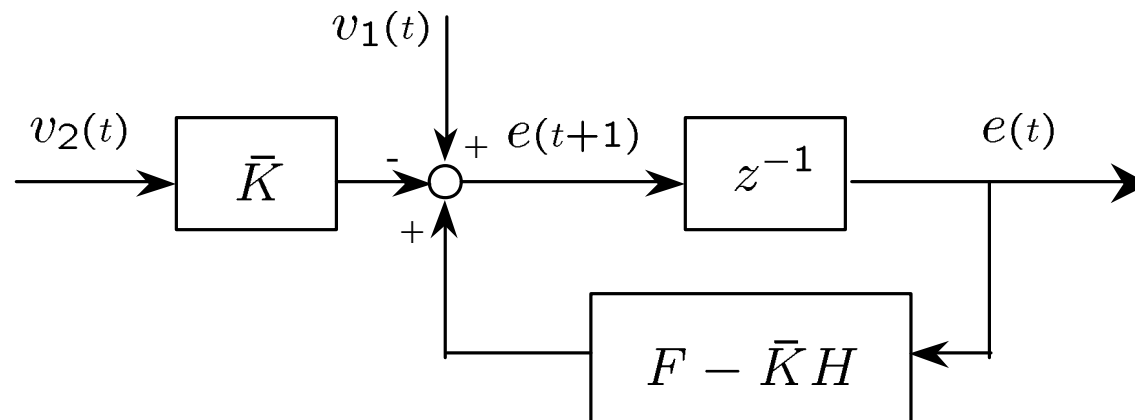


Esempio: Predittore di Kalman di regime



Esempio: dinamica dell'errore

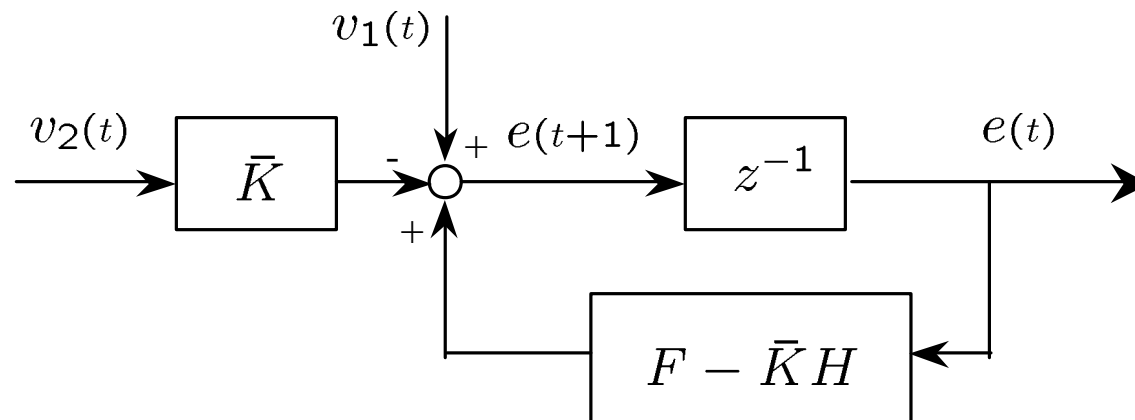
$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ errore di predizione



$$e(t+1) = (F - \bar{K}H) e(t) - \bar{K}v_2(t) + v_1(t)$$

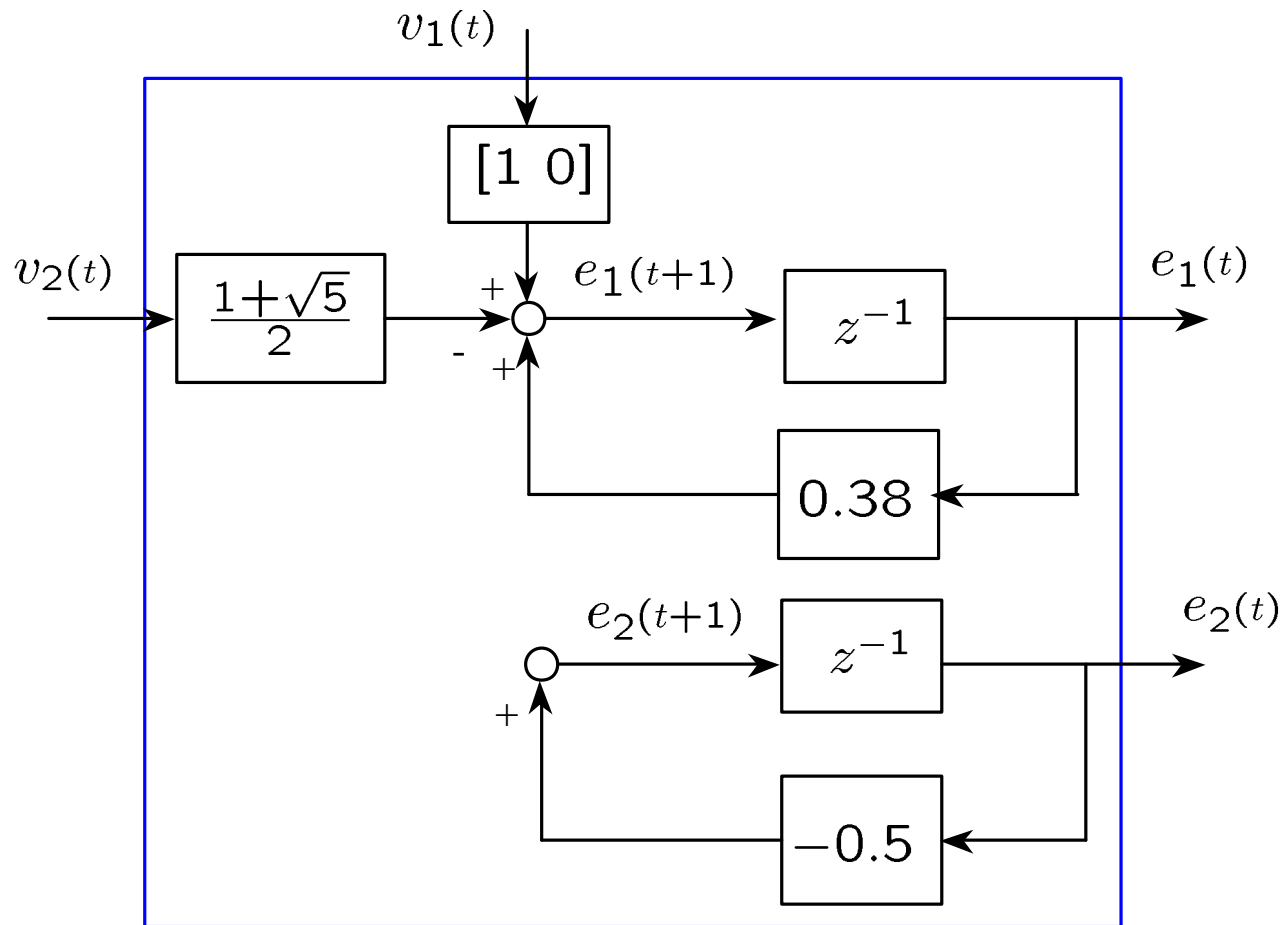
Esempio: dinamica dell'errore

$e(t) := x(t) - \hat{x}(t|t-1)$ errore di predizione



$$e(t+1) = \begin{bmatrix} 0.38 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} e(t) - \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} v_2(t) + v_1(t)$$

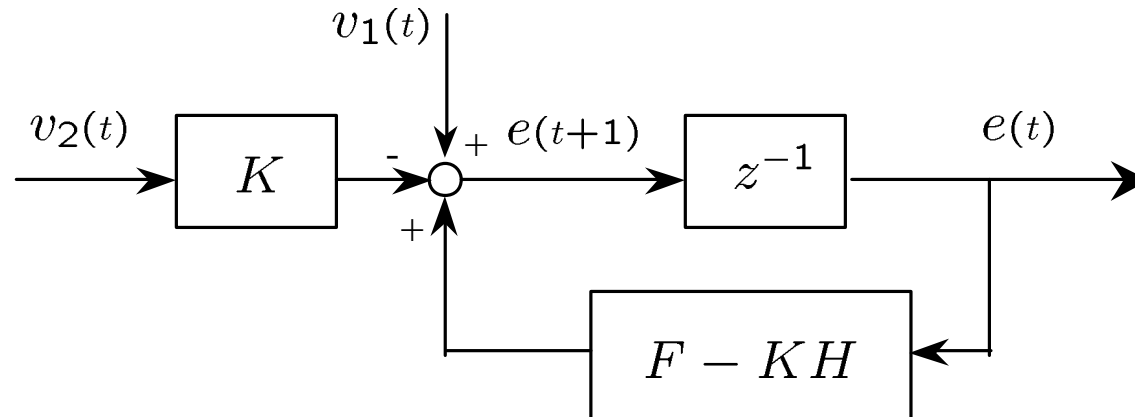
Esempio: dinamica dell'errore



$$\text{var}[e_1(t)] \rightarrow 2 + \sqrt{5}$$

$$\text{var}[e_2(t)] \rightarrow 0$$

Esempio: dinamica dell'errore

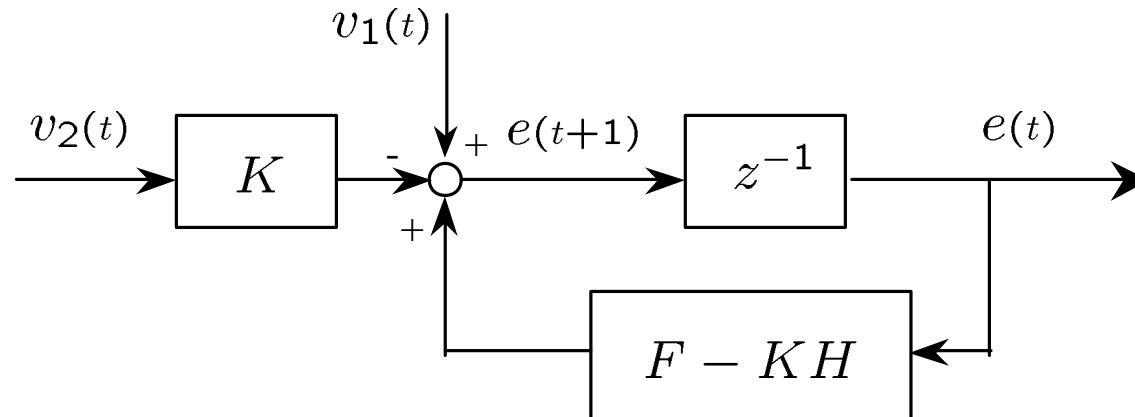


se $K (\neq \bar{K})$ stabilizzante allora

$\text{var}[e(t)] \rightarrow P$ soluzione equazione di Lyapunov

$$P = (F - KH)P(F - KH)^T + V_1 + KV_2K^T$$

Esempio: dinamica dell'errore



se $K (\neq \bar{K})$ stabilizzante allora

$$\text{var}[e_1(t)] \rightarrow c_1 \geq 2 + \sqrt{5}$$

$$\text{var}[e_2(t)] \rightarrow c_2 \geq 0$$

perchè \bar{K} è il guadagno tempo invariante ottimo

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

Definiamo

$$Z(P, K) := (F - KH)P(F - KH)^T + KV_2K^T + V_1$$

$$e(t + 1) = (F - KH) e(t) - K v_2(t) + v_1(t)$$

$$v_1(t) \sim WN(0, V_1), v_2(t) \sim WN(0, V_2)$$

indipendenti

$$\begin{aligned} \text{var}[e(t + 1)] &= E[e(t + 1)e(t + 1)^T] \\ &= (F - KH)\text{var}[e(t)](F - KH)^T + KV_2K^T + V_1 \\ &= Z(\text{var}[e(t)], K) \end{aligned}$$

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

Definiamo

$$Z(P, K) := (F - KH)P(F - KH)^T + KV_2K^T + V_1$$

allora

$$\text{DRE} \quad P(t+1) = Z(P(t), K(t))$$

$$K(t) = FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1}$$

$$\text{ARE} \quad P = Z(P, K)$$

$$K = FPH^T (HPH^T + V_2)^{-1}$$

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

Definiamo

$$Z(P, K) := (F - KH)P(F - KH)^T + KV_2K^T + V_1$$

Proprietà:

$$(1) \quad P^{(1)} \geq P^{(2)} \rightarrow Z(P^{(1)}, K) \geq Z(P^{(2)}, K)$$

immediata dalla definizione di Z

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

Definiamo

$$Z(P, K) := (F - KH)P(F - KH)^T + KV_2K^T + V_1$$

Proprietà:

$$(1) \quad P^{(1)} \geq P^{(2)} \rightarrow Z(P^{(1)}, K) \geq Z(P^{(2)}, K)$$

$$(2) \quad Z(P(t), K(t)) \leq Z(P(t), K), \forall K$$

$$Z(P(t), K) = Z(P(t), K(t))$$

$$+ (K - K(t))(HP(t)H^T + V_2)(K - K(t))^T$$

$$\geq 0$$

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

Definiamo

$$Z(P, K) := (F - KH)P(F - KH)^T + KV_2K^T + V_1$$

Proprietà:

$$(1) \quad P^{(1)} \geq P^{(2)} \rightarrow Z(P^{(1)}, K) \geq Z(P^{(2)}, K)$$

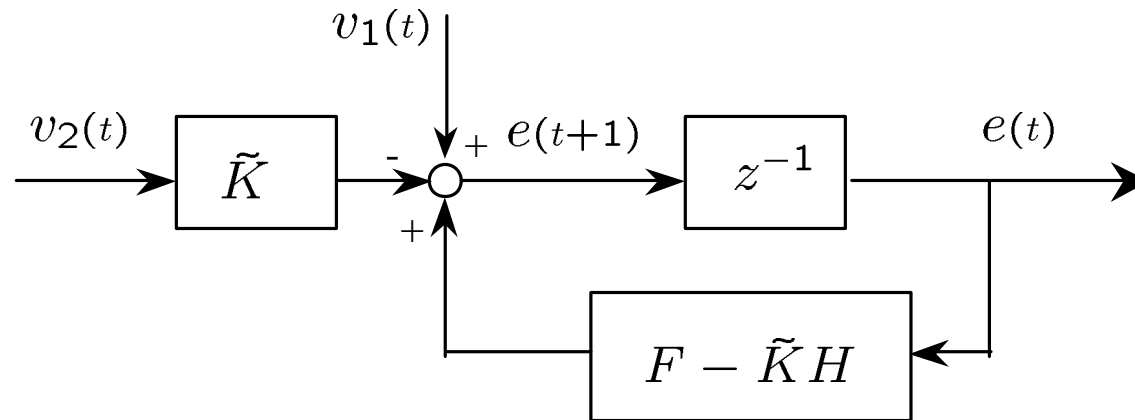
$$(2) \quad Z(P(t), K(t)) \leq Z(P(t), K), \forall K$$

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

(F,H) rivelabile \rightarrow esiste \tilde{K} stabilizzante



$$\tilde{P}(t+1) = Z(\tilde{P}(t), \tilde{K}), \tilde{P}(1) = P(1)$$

varianza dell'errore di predizione quando si utilizza \tilde{K}
essa è limitata (sistema stabile alimentato da processi stazionari)

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

dimostriamo per induzione che

$$P(t) \leq \tilde{P}(t), \forall t \geq 1$$

da cui segue la tesi perché $\tilde{P}(t)$ è limitata

Risultati asintotici

Teorema: se (F,H) è rivelabile, allora $P(t)$ è limitata

Dimostrazione:

$$t = 1 \quad P(1) = \tilde{P}(1)$$

$$\text{ipotesi induttiva: } P(t) \leq \tilde{P}(t)$$

$$\begin{aligned} P(t+1) &= Z(P(t), K(t)) \\ &\leq Z(P(t), \tilde{K}) \quad (2) \\ &\leq Z(\tilde{P}(t), \tilde{K}) \quad (1) + \text{ipotesi induttiva} \\ &= \tilde{P}(t+1) \end{aligned}$$

(F,H) rivelabile $\not\Rightarrow$ P(t) convergente

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{osservabile} \\ \text{instabile} \end{array}$$

$$P(1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P(t+1) = FP(t)F^T - \frac{FP(t)H^T HP(t)F^T}{HP(t)H^T + V_2}$$


$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & t = 2k \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, & t = 2k + 1 \end{cases}$$

(F,H) rivelabile \nrightarrow P(t) convergente

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = 2x_1(t) \\ y(t) = x_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

$$v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$P(1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \quad P(t+1) = FP(t)F^T - \frac{FP(t)H^T HP(t)F^T}{HP(t)H^T + V_2}$$



 valore di $x_2(1)$ noto

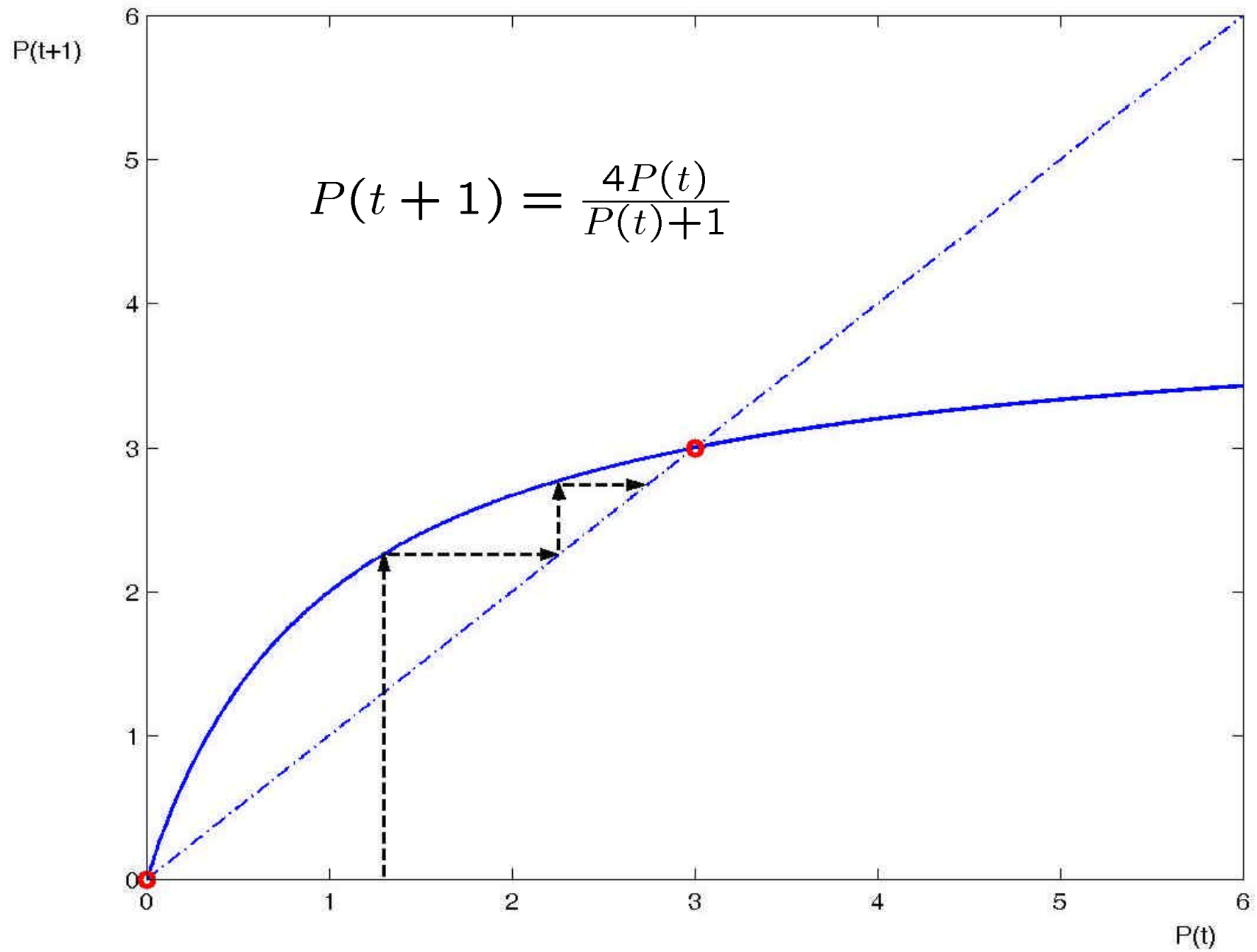
$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}, & t = 2k \\ \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, & t = 2k + 1 \end{cases}$$

le variabili di stato sono predicibili in modo esatto ad istanti alterni

P(t) convergente $\not\rightarrow$ valore limite unico

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = x(t) + v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$P(t+1) = \frac{4P(t)}{P(t)+1}$$



P(t) convergente $\not\rightarrow$ valore limite unico

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) \\ y(t) = x(t) + v_2(t) \end{cases} \quad v_2(t) \sim WN(0, 1)$$

$$\bar{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t+1) = \frac{4P(t)}{P(t)+1} = \begin{cases} 0, & P(0) = 0 \\ 3, & P(0) > 0 \end{cases}$$

$$\bar{K} = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2P(t)}{P(t)+1} = \begin{cases} 0, & P(0) = 0 \\ 1.5, & P(0) > 0 \end{cases}$$

$$F - \bar{K}H = \begin{cases} 2, & P(0) = 0 \\ 0.5, & P(0) > 0 \end{cases}$$

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + V_1 - FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

sistema tempo invariante

$$v_1(t) \sim WN(0, V_1), v_2(t) \sim WN(0, V_2), V_2 > 0$$

disturbi stazionari indipendenti

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + G_v G_v^T - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1} HP(t)F^T$$

$$V_1 = G_v G_v^T$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G_v \tilde{v}_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

sistema tempo invariante

$$\tilde{v}_1(t) \sim WN(0, V_1), v_2(t) \sim WN(0, V_2), V_2 > 0$$

disturbi stazionari indipendenti

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + G_v G_v^T - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1} HP(t)F^T$$

$$V_1 = G_v G_v^T$$

Teorema:

se (F,H) è rivelabile e (F,G_v) è stabilizzabile, allora

- (i) $P(t) \rightarrow \bar{P}, t \rightarrow \infty, \forall P(1) \geq 0$
- (ii) $F - \bar{K}H$ stabile

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + G_v G_v^T - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1} HP(t)F^T$$

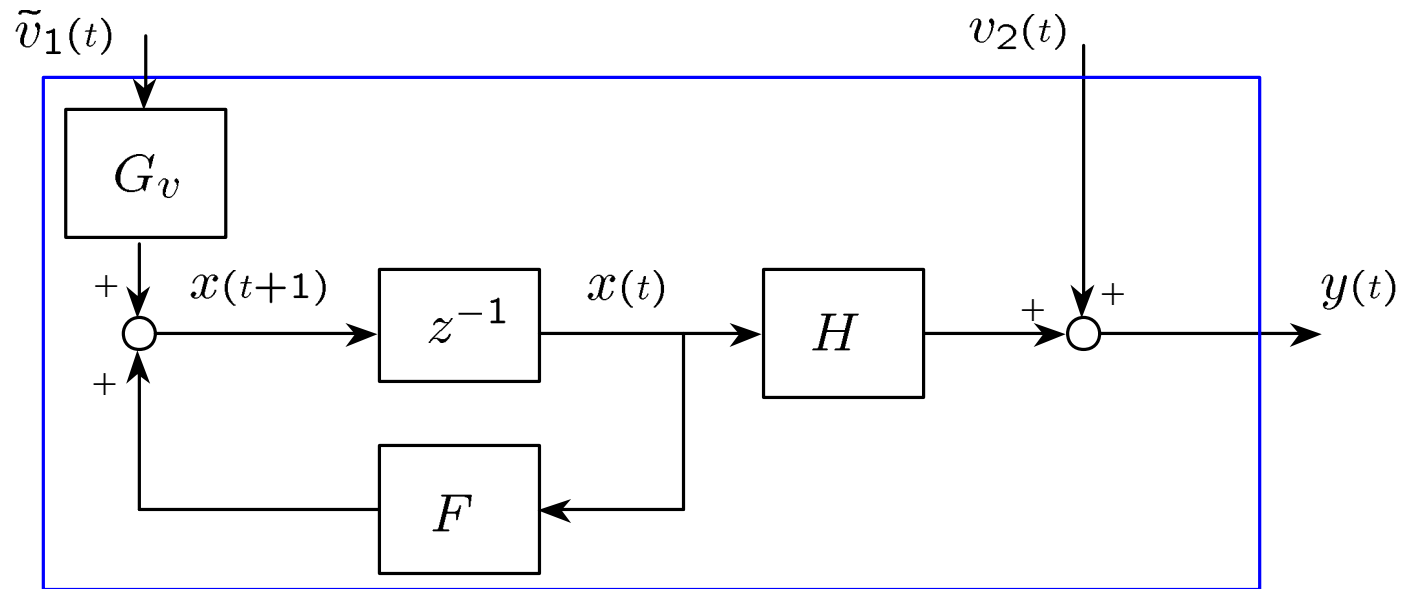
$$V_1 = G_v G_v^T$$

(F, G_v) stabilizzabile significa che l'eventuale parte dello stato del sistema

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G_v \tilde{v}_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

non raggiungibile da \tilde{v}_1 è stabile

Scomposizione di raggiungibilità

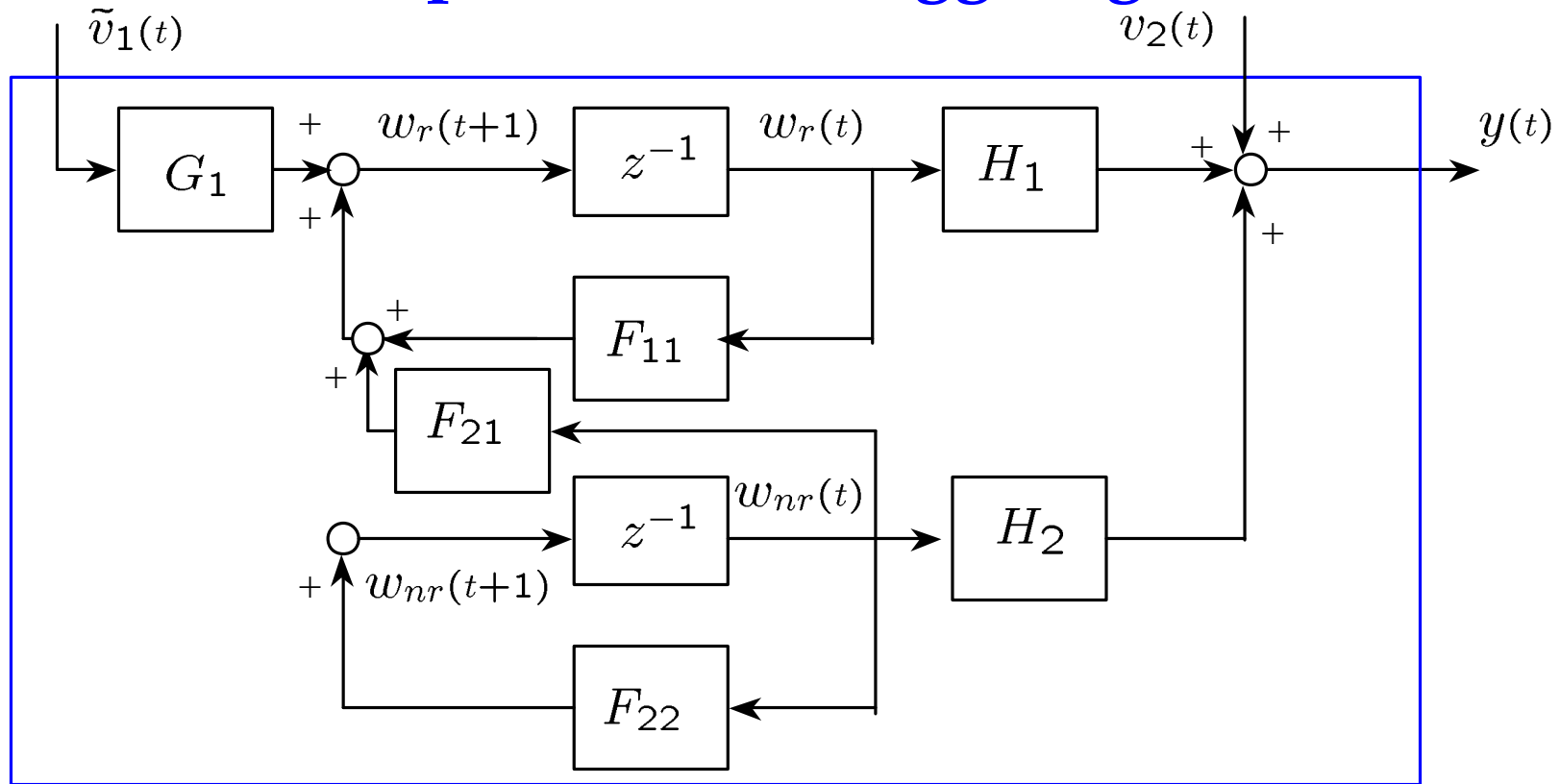


$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G_v \tilde{v}_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

matrice di cambiamento di base per la scomposizione
in parte raggiungibile e non raggiungibile

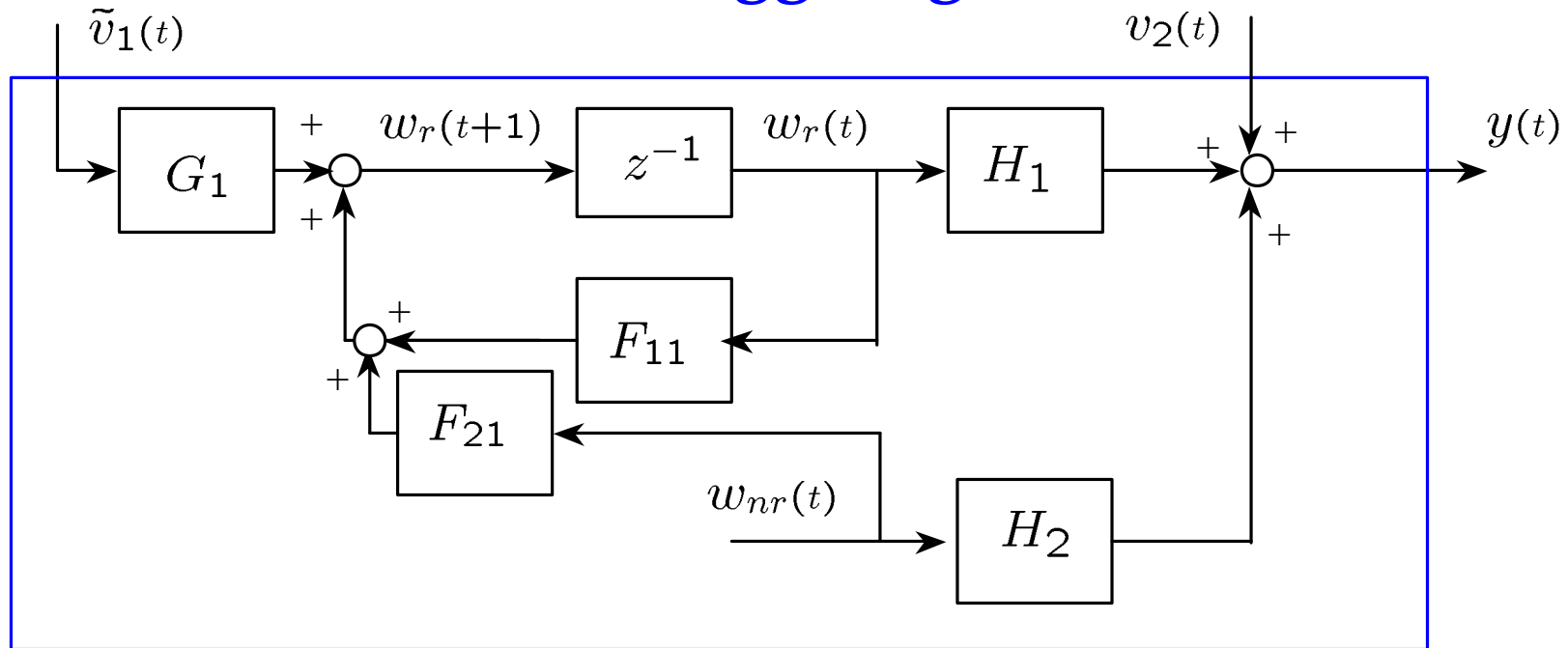
$$w := \begin{matrix} \downarrow \\ T_r \end{matrix} x$$

Scomposizione di raggiungibilità



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} w_r(t+1) \\ w_{nr}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r(t) \\ w_{nr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_r(t) \\ w_{nr}(t) \end{bmatrix} + v_2(t) \end{cases}$$

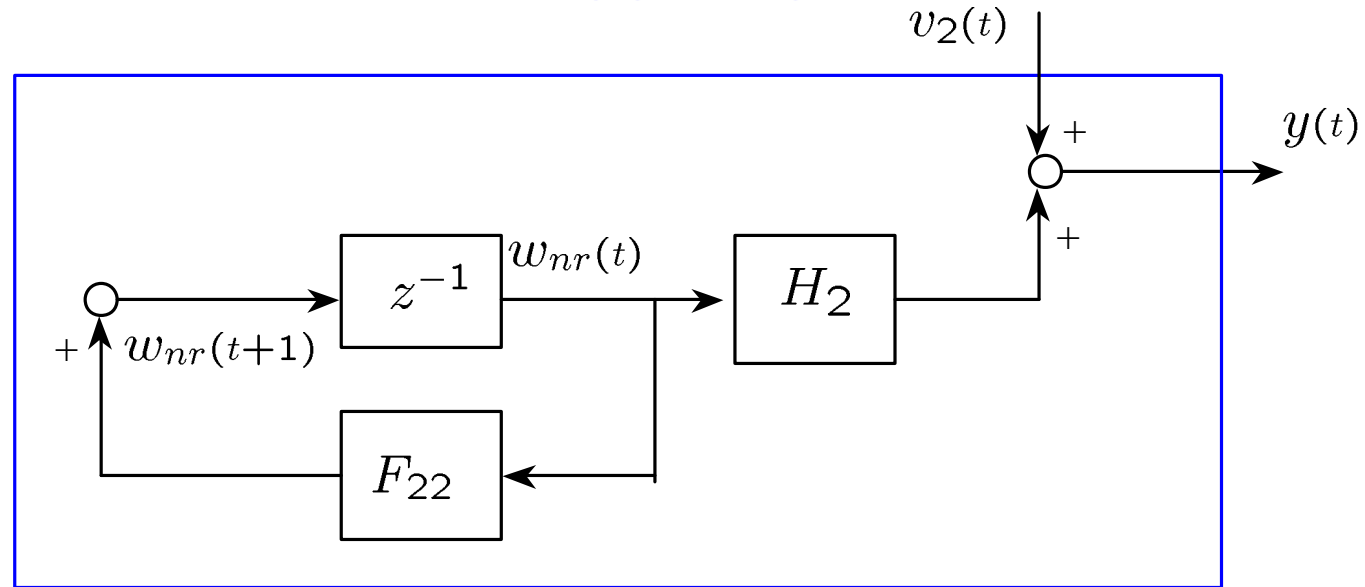
Parte raggiungibile



sotto-sistema (F_{11}, G_1) raggiungibile

→ la predizione della parte raggiungibile avviene con un certo errore perché è “sporcata” dal rumore

Parte non raggiungibile



sotto-sistema non raggiungibile

→ la parte non raggiungibile può essere predetta con errore sempre nullo se è nota la sua condizione iniziale, se è stabile allora si può ottenere un errore di predizione nullo, almeno asintoticamente

P(t) convergente $\not\rightarrow$ valore limite unico

$$\begin{cases} x(t+1) = 2x(t) & \text{non stabilizzabile} \\ y(t) = x(t) + v_2(t) & v_2(t) \sim WN(0, 1) \end{cases}$$

$$\bar{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t+1) = \frac{4P(t)}{P(t)+1} = \begin{cases} 0, & P(0) = 0 \\ 3, & P(0) > 0 \end{cases}$$

$$\bar{K} = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2P(t)}{P(t)+1} = \begin{cases} 0, & P(0) = 0 \\ 1.5, & P(0) > 0 \end{cases}$$

$$F - \bar{K}H = \begin{cases} 2, & P(0) = 0 \\ 0.5, & P(0) > 0 \end{cases}$$

Risultati asintotici

$$P(t+1) = FP(t)F^T + G_v G_v^T - FP(t)H^T (HP(t)H^T + V_2)^{-1} HP(t)F^T$$

$$V_1 = G_v G_v^T$$

(F, G_v) stabilizzabile significa che l'eventuale parte dello stato del sistema

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G_v \tilde{v}_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

non raggiungibile da \tilde{v}_1 è stabile

Inoltre,

$$(F, G_v) \text{ stabilizzabile sse } \begin{cases} G_v^T x = 0 \\ F^T x = \lambda x, |\lambda| \geq 1 \end{cases} \quad x = 0$$

Risultati asintotici

Teorema:

se (F,H) è rivelabile e (F,G_v) è stabilizzabile, allora

(i) $P(t) \rightarrow \bar{P}, t \rightarrow \infty, \forall P(1) \geq 0$

(ii) $F - \bar{K}H$ stabile

Dimostrazione:

Passo 1: soluzione DRE con $P_0(1) = 0: P_0(t) \rightarrow \bar{P}_0$

Passo 2: $F - \bar{K}_0H, \bar{K}_0 = F\bar{P}_0H^T(H\bar{P}_0H^T + V_2)^{-1}$
stabile

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

Dimostrazione

Passo 1: soluzione DRE con $P_0(1) = 0$: $P_0(t) \rightarrow \bar{P}_0$

basta dimostrare che $P_0(t)$ è crescente

$$t = 1 \quad P_0(2) \geq 0 = P_0(1)$$

ipotesi induttiva $P_0(t) \geq P_0(t - 1)$

$$P_0(t + 1) = Z(P_0(t), K_0(t))$$

$$\geq Z(P_0(t - 1), K_0(t)) \quad (1) + \text{ip. induttiva}$$

$$\geq Z(P_0(t - 1), K_0(t - 1)) \quad (2)$$

$$= P_0(t)$$

Nota: serve solo la rivelabilità

Dimostrazione

Passo 2: $F - \bar{K}_0 H$, $\bar{K}_0 = F \bar{P}_0 H^T (H \bar{P}_0 H^T + V_2)^{-1}$
stabile

per assurdo sia λ , con $|\lambda| \geq 1$, autovalore di $(F - \bar{K}_0 H)^T$
e $x \neq 0$ l'autovettore corrispondente.

$$\begin{aligned}\bar{P}_0 &= Z(\bar{P}_0, \bar{K}_0) \\ &= (F - \bar{K}_0 H) \bar{P}_0 (F - K H)^T + \bar{K}_0 V_2 \bar{K}_0^T + V_1\end{aligned}$$

$$x^* \bar{P}_0 x = |\lambda|^2 x^* \bar{P}_0 x + x^* \bar{K}_0 V_2 \bar{K}_0^T x + x^* V_1 x$$

Dimostrazione

Passo 2: $F - \bar{K}_0 H$, $\bar{K}_0 = F \bar{P}_0 H^T (H \bar{P}_0 H^T + V_2)^{-1}$
stabile

per assurdo sia λ , con $|\lambda| \geq 1$, autovalore di $(F - \bar{K}_0 H)^T$
e $x \neq 0$ l'autovettore corrispondente.

$$\boxed{(1 - |\lambda|^2)x^* \bar{P}_0 x} = \boxed{x^* \bar{K}_0 V_2 \bar{K}_0^T x} + \boxed{x^* V_1 x}$$

$\leq 0 \qquad \qquad \geq 0 \qquad \qquad \geq 0$

$$G_v^T x = 0 \quad (V_1 = G_v G_v^T)$$

$$\bar{K}_0^T x = 0 \quad (V_2 > 0)$$

$$\lambda x = (F - \bar{K}_0 H)^T x = F^T x - H^T \bar{K}_0^T x = F^T x$$

Dimostrazione

Passo 2: $F - \bar{K}_0 H$, $\bar{K}_0 = F \bar{P}_0 H^T (H \bar{P}_0 H^T + V_2)^{-1}$
stabile

per assurdo sia λ , con $|\lambda| \geq 1$, autovalore di $(F - \bar{K}_0 H)^T$
e $x \neq 0$ l'autovettore corrispondente.

$$\boxed{(1 - |\lambda|^2)x^* \bar{P}_0 x} = \boxed{x^* \bar{K}_0 V_2 \bar{K}_0^T x} + \boxed{x^* V_1 x}$$

$\leq 0 \qquad \qquad \geq 0 \qquad \qquad \geq 0$

$$G_v^T x = 0$$

$$F^T x = \lambda x$$

contraddice l'ipotesi (F, G_v) stabilizzabile

Dimostrazione

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

supponiamo che $P(1) > 0$

$$P(t+1) = Z(P(t), K(t))$$

$$= (F - K(t)H)P(t)(F - K(t)H)^T + K(t)V_2K(t)^T + V_1$$

$$\geq (F - K(t)H)P(t)(F - K(t)H)^T$$

$$\geq M(t)P(1)M(t)^T$$

$$M(t) := (F - K(t)H)(F - K(t-1)H) \dots (F - K(1)H)$$

limitata perchè $(P(1) > 0, P(t)$ limitata)

Dimostrazione

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

supponiamo che $P(1) > 0$

$$\Delta P(t) := P(t) - \bar{P}_0$$

dimostriamo che $\Delta P(t) \rightarrow 0$

Dimostrazione

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

supponiamo che $P(1) > 0$

$$\Delta P(t) := P(t) - \bar{P}_0$$

$$P(t+1) = Z(P(t), K(t)) = (F - K(t)H)P(t)F^T + V_1$$

$$\bar{P}_0 = Z(\bar{P}_0, \bar{K}_0) = (F - \bar{K}_0H)\bar{P}_0F^T + V_1$$

$$\Delta P(t+1) = (F - \bar{K}_0H)\Delta P(t)(F - K(t)H)^T$$

$$\Delta P(t) = \boxed{(F - \bar{K}_0H)^{t-1}} \Delta P(1) \boxed{M(t-1)^T}$$

tende a zero

limitata

$$\Delta P(t) \rightarrow 0$$

Dimostrazione

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

supponiamo che $P(1) \geq 0$

consideriamo

$$P_n(1) > 0, P_n(1) \geq P(1) \geq P_0(1) = 0$$

allora basta mostrare che

$$\begin{array}{ccc} P_n(t) \geq P(t) \geq P_0(t) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{P}_0 & \implies & \bar{P}_0 \implies P(t) \rightarrow \bar{P}_0 \end{array}$$

Dimostrazione

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

supponiamo che $P(1) \geq 0$

mostriamo $P_n(t) \geq P(t) \geq P_0(t)$

$t = 1 \quad P(1) \geq P_0(1) = 0$

ipotesi induttiva $P(t) \geq P_0(t)$

$$P(t + 1) = Z(P(t), K(t))$$

$$\geq Z(P_0(t), K(t)) \quad (1) + \text{ip. induttiva}$$

$$\geq Z(P_0(t), K_0(t)) \quad (2)$$

$$= P_0(t + 1)$$

analogamente per l'altra disuguaglianza

Risultati asintotici

Teorema:

se (F,H) è rivelabile e (F,G_v) è stabilizzabile, allora

(i) $P(t) \rightarrow \bar{P}, t \rightarrow \infty, \forall P(1) \geq 0$

(ii) $F - \bar{K}H$ stabile

Dimostrazione:

Passo 1: soluzione DRE con $P_0(1) = 0: P_0(t) \rightarrow \bar{P}_0$

Passo 2: $F - \bar{K}_0H, \bar{K}_0 = F\bar{P}_0H^T(H\bar{P}_0H^T + V_2)^{-1}$
stabile

Passo 3: $P(t) \rightarrow \bar{P} = \bar{P}_0, \forall P(1) \geq 0$

Passo 3 implica (i) e passo 2 implica (ii)